Universität zu Köln
Humanwissenschaftliche Fakultät
Department Heilpädagogik und Rehabilitation
Lehrstuhl für Pädagogik und Didaktik bei Menschen mit geistiger Behinderung

Masterarbeit

Zur Erlangung des akademischen Grades des Masters of Education mit Studienprofil Lehramt für sonderpädagogische Förderung

---

Das Stellenwertsystem in inklusiven Klassen – Möglichkeiten des Mathematikunterrichts auf Basis der Mehrdimensionalen Reflexiven Didaktik

---

Erstgutachterin: Prof.‘in Dr. Kerstin Ziemen

Zweitgutachter: Prof. Dr. Norbert Heinen

Tim Rosemann

Pia Schwarzenberg

Korrespondenzadresse:

Klosterstraße 79b

50931 Köln

Köln, 24.08.2018

Abstract (Rosemann & Schwarzenberg)

In dieser Arbeit werden anhand der Mehrdimensionalen Reflexiven Didaktik nach Kerstin Ziemen bedeutsame Theorien und Aspekte zur Reflexion der Inklusionspraxis dargestellt. Am Gegenstand des Stellenwertsystems wird beispielhaft das inklusive Potential dieser Didaktik gezeigt. Dazu wird ein Modellansatz, der die Phylogenese und die Ontogenese der Zahl, ihrer Vorstellungen und Darstellungen verbindet, entwickelt. Die Erkenntnisse münden in der Darstellung möglicher handlungs- und entwicklungsorientierter Unterrichtsimpulse bzgl. des Stellenwertsystems in einem jahrgangsstufenübergreifenden Projektunterricht.

Schlagworte: Mehrdimensionale Reflexive Didaktik; Inklusion, Mathematikunterricht, Kulturhistorische Schule, Tätigkeitstheorie, Stellenwertsystem

Inhaltsverzeichnis

Abstract (Rosemann & Schwarzenberg) I

Inhaltsverzeichnis II

Abkürzungsverzeichnis VI

Abbildungsverzeichnis VII

Tabellenverzeichnis IX

Einleitung (Rosemann & Schwarzenberg) 1

1 Zentrale Begriffe (Rosemann & Schwarzenberg) 4

1.1 Inklusion (Rosemann) 4

1.2 Inklusion und Bildung (Schwarzenberg) 6

1.3 Erziehung, Bildung und Unterricht (Schwarzenberg) 7

1.4 Heterogenität, Differenzlinien und Intersektionalität (Schwarzenberg) 10

2 Die Mehrdimensionale Reflexive Didaktik (Schwarzenberg) 15

2.1 Reflexion des Gesamtprozesses und Selbstreflexion der Teammitarbeiter*innen (Schwarzenberg) 18

2.1.1 Entwicklung – Haltung – Menschenbild (Rosemann) 19

2.1.1.1 Die Tätigkeitstheorie (Schwarzenberg) 26

2.1.1.2 Tätigkeit als Vermittlerin zwischen Lernenden und Lerngegenstand (Schwarzenberg) 27

2.1.1.3 Handlungen und Operationen innerhalb der Tätigkeit (Schwarzenberg) 31

2.1.1.4 Die Zonen der Entwicklung (Schwarzenberg) 32

2.1.1.5 Etappenweise Interiorisation und Herausbildung von Operationen und Begriffen (Schwarzenberg) 34

2.1.1.6 Invariante Strukturen und die Orientierungsgrundlagen (Schwarzenberg) 36

2.1.2 Behinderungsgenese (Schwarzenberg) 39

2.1.2.1 Sozialorientierte Konstruktion von ‚geistiger Behinderung' (Schwarzenberg) 39

2.1.2.2 Personenorientierte Klassifikationsbestrebungen nach ICF und ICD-10-GM im Gesundheitssystem (Schwarzenberg) 42

2.2 Reflexion der makrostrukturellen Aspekte (Schwarzenberg) 45

2.2.1 Mechanismen der Selbstreproduktion des Erziehungs-, Bildungs- und Unterrichtssystems (Rosemann) 45

2.2.2 Inklusive Bildung in heterogenen Gruppen (Schwarzenberg) 46

2.2.2.1 Nationale Rahmenbedingungen unter Beachtung supranationaler Konventionen (Schwarzenberg) 48

2.2.2.2 Föderale Rahmenbedingungen in Nordrhein-Westfalen (Schwarzenberg) . 52

2.2.2.3 Rahmenbedingung für Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (Schwarzenberg) 54

2.2.3 Inklusiver Mathematikunterricht in Nordrhein-Westfalen (Schwarzenberg) 55

2.2.3.1 Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen (Schwarzenberg) 58

2.2.3.2 Lehrplan für das Fach Mathematik in der Grundschule in Nordrhein-Westfalen (Schwarzenberg) 59

2.2.4 Lehrplan für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (Schwarzenberg)... 62

2.2.5 Zentrale Erkenntnisse für die inklusive Unterrichtspraxis (Schwarzenberg) 64

2.3 Reflexion der Rollen der Akteur*innen in der Schule und ihrer Kooperation (Schwarzenberg) 66

2.3.1 Rehistorisierung als Leitidee für pädagogische Diagnostik und die Kooperation (Schwarzenberg) 67

2.3.2 Die Neuropsychologie in der Rehistorisierung (Schwarzenberg)..... 69

2.3.3 Diagnostik als Rehistorisierung (Schwarzenberg)..... 69

2.3.4 Ableitung von Anforderungen an eine pädagogische Diagnostik (Schwarzenberg) 71
2.4 Reflexion des Verhältnisses zwischen Lernenden und Lerngegenstand (Schwarzenberg) 74
2.4.1 Entwicklungslogische Didaktik (Rosemann & Schwarzenberg) 75
2.4.2 Didaktische Desiderata (Rosemann) 77
2.4.3 Zum Verhältnis des Abstrakten und Konkreten (Rosemann) 78
2.4.3.1 Die Lehr- und Lernstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten nach Joachim Lompscher (Rosemann) 80
2.4.3.2 Invarianter Unterricht nach Nina Fëdorovna Talyzina (Rosemann) 82
2.4.3.3 Der entwickelnde Unterricht nach Mariane Hedegaard (Rosemann) 83
2.4.4 Zum Bildungsgehalt des Stellenwertsystems (Schwarzenberg) 87
2.4.5 Gegenstandsanalyse – das Stellenwertsystem und die Geschichte der Zahl: Probleme – Lösungen – Abstraktionen (Rosemann) 88
2.4.6 Invarianten, Stellenwert-Verständnis, Vorläuferkompetenzen (Rosemann) 112
2.4.6.1 Invarianten der Zahlrepräsentationen (Rosemann) 115
2.4.6.2 Stellenwert-Verständnis und pränumerische Vorläuferfertigkeiten (Rosemann) 118
2.5 Reflexion der didaktischen Modelle, Konzepte und Methoden (Schwarzenberg) ... 129
2.5.1 Entdeckendes Lernen und Begriffsbildung im Mathematikunterricht (Schwarzenberg) 130
2.5.1.1 Elemente der Begriffsentwicklung (Schwarzenberg) 132
2.5.1.2 Elemente des Begriffsverständnisses (Schwarzenberg) 134
2.5.1.3 Formen der Begriffsbestimmung (Schwarzenberg) 135
2.5.1.4 Begriffsentwicklung, -verständnis und -bestimmung (Schwarzenberg) 138
2.5.2 Fortschreitende Schematisierung und fortschreitende Mathematisierung (Schwarzenberg) 139

2.5.3 Z4-Modell und M4-Modell (Schwarzenberg) ... 143
2.5.4 Funktional-logisches und prädikativ-logisches Zurechtlegen und Denken (Schwarzenberg) ... 145
2.5.5 Fundamentale Ideen, Spiralcurriculum und Anschauungsebenen (Schwarzenberg) ... 148
3 Unterrichtsgestaltung (Rosemann) ... 152
3.1 Synthese der didaktischen Überlegungen aus kulturhistorischer und mathematikdidaktischer Perspektive (Schwarzenberg) ... 152
3.1.1 Orientierung entlang der Lehr-/Lernstrategie [A →K], Invarianten und Keimzellen (Schwarzenberg) ... 154
3.1.2 Möglichkeiten der Differenzierung (Schwarzenberg) ... 158
3.2 Abstraktionsstufen und Vorstellung entsprechender Mittel (Rosemann) ... 161
3.2.1 Abstraktionsstufe I: Kardinale Zahldarstellungen (Rosemann) ... 162
3.2.2 Abstraktionsstufe II: Ordinalzahlaspekt und ordinale (ordinal-kardinale) Zahldarstellung (Rosemann) ... 164
3.2.3 Abstraktionsstufe III: Konkretes Rechnen nach dem Prinzip des Stellenwerts (Rosemann) ... 168
3.2.4 Abstraktionsstufe IV: Stellenwertsystem (Rosemann) ... 172
3.3 Impulse für die Gestaltung inklusiven Stellenwertunterrichts (Rosemann) ... 174
3.4 Unterrichtsbeispiel (Rosemann) ... 177
4 Fazit & Ausblick (Rosemann & Schwarzenberg) ... 186
Literaturverzeichnis ... 191

Abkürzungsverzeichnis

AO-SF	Verordnung über die sonderpädagogische Förderung, den Hausunterricht und die Schule für Kranke (Ausbildungsordnung sonderpädagogische Förderung)
DIMDI	Deutsches Institut für Medizinische Dokumentation und Information
EBU	Erziehungs-, Bildungs- und Unterrichtssystem
ICD	International Classification of Diseases
ICF	International Classification of Functioning, Disability and Health
ICIDH	International Classification of Impairments, Disabilities and Handicaps
KMK	Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland
MRD	Mehrdimensionale Reflexive Didaktik
MSW NRW	Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen
NRW	Nordrhein-Westfalen
P.S.	Pia Schwarzenberg
T.R.	Tim Rosemann
VN-BRK	Übereinkommen der Vereinten Nationen über die Rechte von Menschen mit Behinderung
WHO	World Health Organization

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Vereinfachte Darstellung der MRD nach K. Ziemen (2002; 2017a) 15
Abb. 2: Zusammenhang zwischen Tätigkeit, Handlungen und Operationen (vgl. Kölbl 2006, 133 mod. P.S.) 31
Abb. 3: Visualisierung Entwicklungszonen 33
Abb. 4: Keimzell-Modell zum Problembereich der Evolution der Tiere nach Hedegaard 2005 aus Geise 2012, 38. 86
Abb. 5: Darstellung wesentlicher in das Stellenwertsystem eingegangenen Abstraktionen .. 110
Abb. 6: Keimzell-Modell der Invarianten des Stellenwertsystems in formal-symbolischer Darstellung 113
Abb. 7: Konstitution des Zahlwerts im dezimalen Stellenwertsystem 115
Abb. 8: Keimzell-Modell der Invarianten des Stellenwertsystems in sprachlicher Darstellung 117
Abb. 9: Lösung des Problems des Umgangs mit unnatürlichen Vielzahlen 121
Abb. 10: Verbindung von phylogenetischen Abstraktionen der Zahlentwicklung mit ontogenetischen Voraussetzungen des Erwerbs 127
Abb. 11: Unterschiedlich schematische Lösungen der Aufgabe 8x23 (vgl. Treffers 1987, 128) 141
Abb. 12: *Z*4-Modell nach Schwank (2013c, 4) und M4- Modell nach ebd.; modifiziert von P.S 144
Abb. 13: funktional- und prädikativ-logisch lösbare 3x3-Matrix nach Schwank (2013c, 3). 147
Abb. 14: Ausgangsabstraktion zur kardinalen Zahldarstellung 162
Abb. 15: Unstrukturierte Menge (Würfel) als Zähl- und Rechenmittel aus (Rödler 2006, 59) 163
Abb. 16: Keimzelle zum Ordinalzahlaspekt und der ordinalen (ordinal-kardinalen) Zahldarstellung 164
Abb. 17: Unstrukturierte und strukturierte Menge (Würfel) als Zähl- und Rechenmittel aus Rödler 2006, 59 165
Abb. 18: Abbildung: Zehnersystemblöcke aus Betzold (o.J., o.S.). 165
Abb. 19: Keimzelle der Zahlwörter 168

Abb. 20: Keimzelle des Rechnens mit dem Prinzip des Stellenwerts..... 168
Abb. 21: Schematische Darstellung des Rechenbretts mit Bündelwertzahlen 169
Abb. 22: Darstellung des Rechenbretts mithilfe von Systemblöcken. Fotos aus: Betzold (o.J., o.S.). 170
Abb. 23: Schematische Darstellung des Rechenbretts mit Bündelwertzahlen 171
Abb. 24: Schematische Darstellung des Rechenbretts mit Zehnerpotenzen..... 171
Abb. 25: Keimzelle des Stellenwertsystems 173
Abb. 26: : Beispiel für das Lernen mit einer Keimzelle zum Stellenwert. Fotos aus: Betzold (o.J., o.S.). 184

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Typen der Orientierungsgrundlage (Talyzina 2013, 226)..... 37
Tabelle 2: Meilensteine der Zahlentwicklung (vgl. Ifrah 1991, 545ff.)..... 112

Einleitung (Rosemann & Schwarzenberg)

> Inklusion an Schulen – ein Etikettenschwindel. Während die Inklusionsquoten aufgeblasen werden, geht die Ausgrenzung behinderter Kinder an Förderschulen weiter,

titelte die Süddeutsche Zeitung am 31. Juli 2018 einen Gastbeitrag Hans Wockens. Mit Blick auf viele sogenannte allgemeinbildende Schulen müsste mit Georg Feuser (1995) allerdings noch hinzugefügt werden, dass auch heute noch in vielen Fällen das „ständisch-segregierende" (169) Schulsystem „letztlich in seiner Struktur und Funktion nach unverändert" (ebd.) bleibt. Dabei liegen seit Jahren vollwertige und wahrhaft allgemeine Didaktiken vor, die mehr zu leisten vermögen – im Zuge derer nicht die räumliche Nähe von Lernenden mit und ohne sogenannter Behinderung und damit die Weiterführung alter Segregationspraktiken, sondern die Anerkennung von Vielfalt und die inneren Prozesse der Entwicklung *aller* im Vordergrund stehen.

In der vorliegenden Arbeit sei anhand der Mehrdimensionalen Reflexiven Didaktik (MRD) Kerstin Ziemens (2018) gezeigt, wie ein bedeutsames Themengebiet des schulischen Mathematikunterrichts – das (dezimale) Stellenwertsystem – entlang einer solchen inklusiven allgemeinen Didaktik für maximal heterogene Lerngruppen aufbereitet werden kann. Zugleich ist ein Anliegen dieser Arbeit, Erkenntnisse der kulturhistorischen Schule zur Aufbereitung und Unterrichtung eines Gegenstandes nutzbar zu machen. Das dargestellte Vorgehen zur Entwicklung inklusiver Unterrichtsangebote soll dabei in ähnlicher Form entsprechend der Ebenen der MRD für andere Fächer und Inhaltsgebiete wiederholt werden können. Denn diese Aufbereitung unterscheidet sich, wie in der nachfolgenden Auseinandersetzung ersichtlich werden wird, in Teilen deutlich von traditionell aufbereiteten Unterrichtsinhalten, weshalb hinsichtlich dieser Ansätze noch zahlreiche Fachgebiete unerschlossen sind.

Die Struktur dieser Arbeit ist an den fünf Ebenen der MRD orientiert, deren Bedeutung und Reflexionsgegenstände in der Auseinandersetzung hinsichtlich des Stellenwertsystems konkretisiert werden. Zugleich werden entsprechend der Ebenen ausgewählte bedeutsame Theorien und Aspekte beschrieben, auf deren Grundlage Reflexion stattfinden kann.

Auf die Ausführungen zum kontroversen Begriff der Inklusion im Allgemeinen sowie zur inklusiven Bildung in heterogenen Gruppen folgt die Beschreibung der Ebenen der MRD. Hierbei

werden unter Thematisierung von Differenzlinien im Kontext von Heterogenität und Intersektionalität das Recht und der Anspruch auf Erziehung, Bildung und Unterstützung aller Lernenden herausgearbeitet.

Innerhalb der *Ebene der Reflexion des Gesamtprozesses und der Selbstreflexion* werden Überlegungen zur Haltung sowie dem ihr zugrundeliegenden Menschenbild und Entwicklungsverständnis dargestellt. Dies wird durch Rückgriff auf die Tätigkeitstheorie der originär psychologischen kulturhistorischen Schule vollzogen, wobei führende Tätigkeiten, die Orientierung an Zonen der Entwicklung, die etappenweise Interiorisation und Herausbildung von Begriffen und Operationen sowie die Ausbildung von Orientierungsgrundlagen basierend auf invarianten Strukturen Berücksichtigung finden. Ergänzt werden diese Ausführungen durch zwei Perspektiven auf die Genese sog. (geistiger) Behinderung. Dies geschieht zum einen entlang einer sozialorientierten Sichtweise unter Beachtung von individuellen Entwicklungsdispositionen im Wechselspiel mit kulturhistorisch geprägten Veränderungen der unterbreiteten Lern- und Entwicklungsangebote. Zum anderen wird entlang einer personen- und in Teilen defizitorientierten Sichtweise der International Classification of Functioning, Disability and Health (ICF) unter Rückgriff auf die International Classification of Diseases (ICD) die medizinische Konstruktion und Zuschreibung von sog. (geistiger) Behinderung aufgrund ihrer Relevanz für die Lebenswelt von Menschen, die unter den Bedingungen einer Behinderung leben, betrachtet.

Darauf folgt die Beschreibung der *Ebene der Reflexion der makrostrukturellen Aspekte*, da das System Schule von internationalen, nationalen sowie föderalen Konventionen und Gesetzgebungen beeinflusst und so die schulische Wirklichkeit mitbestimmt wird. Dabei werden exemplarisch rechtliche Grundlagen des Bundeslandes Nordrhein-Westfalen bzgl. des Fachs Mathematik inhaltlich vertiefend dargestellt.

Nachfolgend wird die *Ebene der Reflexion der Rollen der Akteur*innen und ihrer Kooperationen* dargestellt. Fachpersonen sind in Kooperation miteinander für die Gestaltung von Lern- und Entwicklungsangeboten im Unterricht maßgeblich verantwortlich – ihre Rolle ist demnach von besonderer Bedeutung. Da jedoch weder eine konkrete Lerngruppe noch eine spezifische Schule innerhalb dieser Arbeit einbezogen werden, soll eine diagnostische Perspektive hergeleitet werden, die Entwicklung, Lernen und die individuellen Entwicklungsdispositionen wertschätzend betrachtet, anerkennt und zum Ausgangspunkt von Unterricht macht. Aus diesem Grund werden

die rehistorisierende Diagnostik und aus ihr abzuleitende Impulse für die pädagogische Diagnostik vorgestellt.

Die *Reflexion des Verhältnisses zwischen Lernenden und Lerngegenstand* wird verbunden mit der Skizzierung der entwicklungslogischen Didaktik von Georg Feuser sowie der Vertiefung ausgewählter kulturhistorischer didaktischer Überlegungen – etwa der Lehr-/Lernstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten, dem Unterricht entlang von Invarianten sowie dem entwickelnden Unterricht durch Keimzellen. Ihnen allen ist gemein, das Verhältnis zwischen Lerngegenstand und Lernenden durch die Fokussierung auf die Vermittlung zu betrachten. Hieran schließt eine gegenstandsanalytische Betrachtung des Stellenwertsystems an. Dabei wird zum Zwecke eines möglichst basalen Zugangs zur Zahl und ihren Darstellungen ein Modellansatz entwickelt, der ontogenetische pränumerische Vorläuferfähigkeiten und -fertigkeiten mit der Phylogenese der Zahl in Verbindung bringt. Mithilfe dieses Modellansatzes werden dann Invarianten und Keimzellen zur Unterrichtung des Stellenwertsystems erschlossen.

Im Zuge der Betrachtung der *Ebene der didaktischen Konzepte und Methoden sowie Materialien* wird eine mathematikdidaktische Betrachtung der Inhaltsbereiche vorgenommen. Hierbei kommt es zu einer Auswahl des didaktischen Konzepts des entdeckenden Lernens und der Konzentration auf die Ausbildung mathematischer Begriffe. Des Weiteren werden Überlegungen zur fortschreitenden Schematisierung und Mathematisierung innerhalb der Lerntätigkeit einbezogen. Diese Aspekte werden durch weitere mathematikdidaktische Überlegungen angereichert.

Nach der Beschreibung verschiedener Abstraktionsstufen und entsprechender (Rechen-)Mittel werden auf Grundlage der erarbeiteten und synthetisierten Erkenntnisse dieser Arbeit daraus folgende Anforderungen an die Unterrichtspraxis abgeleitet. Nach dieser letzten Aufbereitung wesentlicher Anforderungen werden abschließend Impulse für die Gestaltung eines inklusiven Stellenwertunterrichts in heterogenen Lerngruppen gegeben. Dabei werden die erarbeiteten Erkenntnisse anhand einer beispielhaften Projektunterrichtkonzeption konkreter dargestellt.

Die vorliegende Arbeit wird im Fazit kritisch zusammengefasst und reflektiert. Zudem werden abschließend weitere Impulse für die inklusive Unterrichtspraxis gegeben.

Doch zunächst sei vor der Beschreibung und Konkretisierung der Ebenen der MRD auf den Prozess der Inklusion eingegangen.

1 Zentrale Begriffe (Rosemann & Schwarzenberg)

Nachstehend sei eine inhaltliche Klärung einiger zentraler Begriffe der vorliegenden Arbeit vorgenommen. Die Notwendigkeit dieser Klärung ergibt sich daraus, dass die Auseinandersetzung mit der MRD und das Entwickeln von Unterrichtsimpulsen auf diesen zentralen Begrifflichkeiten aufbauen.

Zuerst wird der Inklusionsbegriff thematisiert. Anschließend findet eine Ausrichtung auf das System Schule statt, innerhalb dessen Bildung, Unterricht und Erziehung tragende Elemente sind. Diese sind wiederum mit den Begriffen Heterogenität, Differenz und Intersektionalität zu verbinden.

1.1 Inklusion (Rosemann)

Der insbesondere seit Ende der 2000er Jahre in der Öffentlichkeit genutzte Begriff der Inklusion entstammt dem mittellateinischen Verb ‚inclūdere' (inclūsum) ‚einschließen' (vgl. Kluge 2011, 445) und wird im öffentlichen Diskurs oft in Bezug auf Schule und das Konstrukt der sog. Behinderung benutzt.

Dabei zielt der Begriff vielmehr auf einen gesamtgesellschaftlichen und nicht allein schulischen Prozess und bezieht sich auf die Ablehnung und Vermeidung von „Marginalisierung, Diskriminierung und Stigmatisierung" (Ziemen 2018, 7) und die „Wertschätzung von Verschiedenheit in Gemeinschaften, Institutionen und Organisationen" (ebd.). Trotz der notwendigen Weite des Begriffs ist die vorliegende Arbeit auf das schulische Feld bezogen.

Bezüglich der Heterogenitätsdimension der sog. Behinderung kann konstatiert werden: Ungeachtet der 2009 von Deutschland ratifizierten UN-Behindertenrechtskonvention (BRK) und des Einzugs des Rechts auf inklusive Beschulung in einem flächendeckenden inklusiven Schulsystem in zahlreiche Schulgesetze der Länder, ist der Stand der Inklusion elf Jahre nach der deutschen Erstunterzeichnung der BRK als unzureichend zu bezeichnen (vgl. Vereinte Nationen 2006; vgl. MSW NRW 2016).

Denn obschon etwa 41,6 % aller nordrhein-westfälischen Schülerinnen und Schüler, denen ein sog. sonderpädagogischer Förderschwerpunkt zugewiesen wurde, im Schuljahr 2017/18 in sog. allgemeinbildenden Schulen unterrichtet wurden, ist das Bestehen der Marginalisierung schon an quantitativen Gegebenheiten zu zeigen (vgl. MSW NRW 2018a, 27). Insbesondere die

‚Randbereiche' der Beschulungsstatistik des Landes sind – trotz der angesichts der Geschichte des Sonderschulwesens positiv zu bewertenden Inklusionsquote – beachtenswert. So wurden zugleich nur etwa 2,1 % aller Lernenden mit einer sog. Förderschwerpunktdiagnose in Gymnasien beschult, während nur etwa 12,2 % der Schülerinnen und Schüler, denen eine sog. geistige Behinderung diagnostiziert wurde, inklusiv unterrichtet wurden (vgl. ebd.). Während der Status quo an Gymnasien also aufrechterhalten wird, ist die letztgenannte Personengruppe noch immer besonders von Marginalisierung betroffen.

Zugleich ist darauf hinzuweisen, dass der Begriff der Inklusion entsprechend verschiedener Interessen, Denkrichtungen und gesellschaftlicher Narrative auch unterschiedlich aufgefasst und konstruiert wird. Doch hier besteht gerade die Gefahr der Verflachung der hinter ihm stehenden Vorstellungen der sozialen Genese von Benachteiligung und ihrer Auflösung durch Nicht-Stigmatisierung. Dies ist etwa am Integrationsbegriff erkennbar, der viele Jahrzehnte in Fach- und öffentlicher Diskussion benutzt wurde, dessen Benutzung allerdings nicht das mit ihm verbundene Versprechen erfüllte, das Schulsystem von einem System der Selektion und Marginalisierung bestimmter gesellschaftlicher Gruppen zu einem System der Potentialentfaltung werden zu lassen (vgl. Kuhlmann 2018, 431).

Aus diesem Grund ist das Festhalten an einem unteilbaren Inklusionsbegriff notwendig, der sicherstellt, dass negative soziale Zuschreibungsprozesse und deren Folgen verringert werden können, dass also Inklusion verwirklicht wird, wo sich auf den Inklusionsbegriff bezogen wird. Als Beispiel für eine konstruktives Verständnis von Inklusion kann eine Definition der deutschen UNESCO-Kommission (2014) angeführt werden, die Inklusion als einen Prozess auffasst,

> der die Kompetenzen im Bildungssystem stärkt, die notwendig sind, um alle Lernenden zu erreichen. Inklusive Bildung geht auf die verschiedenen Bedürfnisse von Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen ein. Erreicht wird dies durch verstärkte Partizipation an Lernprozessen, Kultur und Gemeinwesen, sowie durch eine konsequente Reduktion von Exklusion in der Bildung. Dazu bedarf es Veränderungen in den Inhalten, Ansätzen, Strukturen und Strategien im Bildungswesen. Diese Veränderungen müssen von einer gemeinsamen Vision getragen werden, die alle Menschen einbezieht, und die von der Überzeugung getragen wird, dass es in der Verantwortung des regulären Systems liegt, alle Lernenden angemessen zu unterrichten. (9)

So verstanden ist Inklusion ebenfalls ein Gesellschaftsideal, dessen fortschreitende Realisierung von den Akteurinnen und Akteuren des Systems abhängig ist. Allerdings ist nicht allein die Zuversicht der Beteiligten vonnöten. Neben einem Verständnis der sozialen Konstruktion von

nur augenscheinlich beobachtungsunabhängigen Phänomenen bedarf es insbesondere didaktischer Kompetenzen, um schulbezogen inklusiv arbeiten zu können.

Die nachstehend vorgestellte und auf den Gegenstand des Stellenwertsystems angewandte Mehrdimensionale Reflexive Didaktik Kerstin Ziemens (2018, 91ff.) ist als allgemeine Didaktik auf größtmögliche Heterogenität ausgerichtet.

1.2 Inklusion und Bildung (Schwarzenberg)

Annäherungen an den Begriff der Inklusion sind mit Herausforderungen verbunden, da es – wie zuvor bereits angedeutet – zum einen spätestens seit der Ratifizierung der VN-Behindertenrechtskonvention zu einem inflationären Gebrauch des Begriffs gekommen ist (vgl. Budde 2017, 16; vgl. Katzenbach 2017, 123) und zum anderen weil das dahinterstehende Konstrukt aus unterschiedlichen Perspektiven verschiedenen gedacht werden kann – dies betrifft vor allem das alltägliche und häufig negativ konnotierte Verständnis. Erschwert wird das Begriffsverständnis zusätzlich dadurch, dass eine Abgrenzung zum Begriff der Integration erforderlich ist – auch dies ist bereits angeklungen.

Im Folgenden geht es darum, grundlegende Begrifflichkeiten zu skizzieren und zueinander in Beziehung zu setzen. Hierbei werden Integration, Inklusion, Intersektionalität, Heterogenität und Differenz betrachtet und kurz im Sinne dieser Arbeit vorgestellt. Dies stellt eine drastische inhaltliche Verkürzung dieser komplexen Konstrukte dar, kann aber im Rahmen dieser Arbeit nicht anders realisiert werden.

Der gesellschaftlich-politische Prozess der Inklusion ist bereits zuvor skizziert worden. Zu konstatieren gilt, dass Politik auf gesellschaftlicher Ebene maßgeblichen Einfluss auf die Lebenswirklichkeit aller Gesellschaftsmitglieder ausübt und gleichzeitig Wahlmöglichkeiten und Wahlen innerhalb demokratischer Gesellschaften Politik maßgeblich beeinflussen. Innerhalb dieser Konstruktionsprozesse ist Inklusion auf gesellschaftlicher Ebene, worunter die schulische Bildung fällt, eingebunden. Deshalb wird innerhalb dieser Masterarbeit *Inklusion* als gesamtgesellschaftliche und politische Aufgabe angesehen. „Die Wertschätzung von Verschiedenheit in Gemeinschaften, Institutionen und Organisationen ist ein Kennzeichen von Inklusion“ (Ziemen 2018, 7), wobei Demokratie, Humanität und Solidarität als Eckpfeiler der Makroebene angesehen werden (vgl. ebd., 8). Auf einer Mikroebene werden Partizipation und die Möglichkeiten

zur Partizipation in Abhängigkeit von einer vorurteilsbewussten und demnach reflexiven Haltung des bzw. der Einzelnen, der Anerkennung und Berücksichtigung von Heterogenität und ihren möglichen Differenzlinien als Ausdruck der Vielfalt aller Akteure über alle Lebensalterspannen hinweg betrachtet (vgl. ebd.). Demnach können Erkennen, Verstehen und Handeln als zentrale Elemente für das Gelingen von Inklusion angesehen werden (vgl. ebd., 9, vgl. Ziemen 2017b, 101f.).

Des Weiteren kann Inklusion als Gegenpol zur Exklusion gedacht werden, wobei sich Inklusion auf hohe Partizipationsmöglichkeiten jedes Individuums oder einer Personengruppe innerhalb einer Gesellschaft bezieht und Exklusion als Isolation oder gar Ausschluss von einzelnen Personen oder Personengruppen aus der Gesellschaft. Diese Perspektive ist soziologisch geprägt (vgl. Budde 2017, 24). Bei der *Integration* liegt die binäre Unterscheidung zwischen den Zuschreibungen behindert und nicht-behindert von Lernenden im System Schule zugrunde und dem daraus abgeleiteten Bestreben, in Anerkennung und Achtung dieser Differenz alle Schülerinnen und Schüler gemeinsam zu beschulen (vgl. Katzenbach 2013, 123f.). Gegenwärtig findet der Begriff der Integration häufig Verwendung im Kontext von Fragestellungen um Migration. Die Debatte um Integration ist der Inklusionsdebatte vorausgegangen und hatte ebenfalls Relevanz auf gesellschaftspolitischer Ebene (vgl. ebd.) – das Scheitern ist bereits zuvor angedeutet worden.

Die Mehrdimensionale Reflexive Didaktik wird als allgemeine Didaktik auf dem hier skizzierten Verständnis von Inklusion und Exklusion aufgebaut und es werden Anregungen für die Gestaltung von schulischer Inklusion unter Beachtung der politischen Ebene, den Lernenden, den Lerngegenständen, den Gestalter*innen schulischer Inklusionsprozesse sowie die Selbstreflexivität der Handelnden und ihrer Kooperation entwickelt (vgl. Kapitel 2). Doch zunächst seien auf die Begriffe Erziehung, Bildung und Unterricht eingegangen.

1.3 Erziehung, Bildung und Unterricht (Schwarzenberg)

Aufgrund der Fokussierung auf Inklusion in schulischen Bildungsprozessen sollen im Folgenden kurz die drei Begriffe der Bildung, der Erziehung und des Unterrichts im Sinne dieser Arbeit skizziert werden – unter Abgrenzung und Bezug zu den Begriffen der Therapie, Pflege und Förderung.

Das Recht auf *Bildung* wird als interdependent mit dem Lebensrecht aufgefasst, da alle Menschen phylogenetisch bedingt lern- und entwicklungsfähig sind (vgl. Speck 2013, 52f.). Hieraus wird auch der Anspruch auf lebenslange Bildung für alle hergeleitet (vgl. Heinen 2003, 127f.). Referiert man auf die kategoriale Bildungstheorie Wolfgang Klafkis, so werden die Bedeutung von materialer und formaler Bildung deutlich bei der sog. doppelseitigen Erschließung, die zur „Fähigkeit zur Selbstbestimmung, Mitbestimmung und Solidarität" (ebd., 130) sowie zur Allgemeinbildung führt (vgl. ebd. mit Referenz auf Klafki).

Ergänzt man diese Ausführungen um eine sozial orientiertere Ausrichtung mit Ursula Stinkes (2017), so wird die zuvor tendenziell personenorientierte Sichtweise auf Bildung erweitert. „Aus sozialgeschichtlicher Sicht ist Bildung ein die Gesellschaft umformender, aber auch von ihr bestimmter Aspekt der gesellschaftlichen Entwicklung." (32). Durch Bildung werden politische Verhältnisse stabilisiert und hervorgebracht; der Begriff und die mit ihm verbundene Praxis sind somit mit Macht verwoben (vgl. ebd.). „Bildung wird nicht nur als Übergang von Subjekt zum Objekt und Objekt zum Subjekt deutlich, sondern vor allem als kollektiver Prozess im Medium des Allgemeinen kommunizierbar." (ebd., 33) Es geht um das anthropologische Bedürfnis nach sich selbst und dem Anderen zugleich sowie um Anerkennung im jeweiligen soziogeschichtlichen Kontext. (vgl. ebd., 32f.) Hierbei erhält insgesamt die Forderung nach freier Entfaltung der Persönlichkeit hohe Bedeutung (vgl. Heinen 2003, 128f. mit Referenz auf das Grundgesetz). „Bildung ist primär als Selbstbildung zu verstehen, d.h. als ein Vorgang, durch den der Mensch sein Mensch-sein in der Welt und damit sein Selbst- und Weltverständnis ausprägt." (Speck 1998, 45) Weiter führt Otto Speck aus: „Menschsein ist In-der-Welt-sein [sic!], ist immer schon Mitsein als Mensch-mit-dem-Menschen-sein [sic!], als Einbezogen-sein [sic!] in die gemeinsame Lebenswelt der je Verschiedenen auf dem gemeinsamen Weg zu einer besseren Welt." (ebd.) Zusammengefasst ergibt sich also, dass Bildung sowohl auf der Individualebene als auch kulturell-geschichtlich wirkt.

Erziehung umfasst „üblicherweise alle Aktivitäten der Erwachsenengeneration [...], die dazu dienen, die nachwachsende Generation zu einem selbständigen [sic!] Leben im Rahmen von Gesellschaft und Kultur zu führen." (Hierdeis 2017, 70) Hierbei sind „das dialogische Verhältnis und die interpersonale Beziehung im Kontext zwischenmenschlicher Begegnung als Konstitutivum zu benennen, beschreiben und zu fordern." (Heinen 2003, 127) Erziehung erfolgt

zudem nicht ausschließlich in schulischen Bildungseinrichtungen; sie ist allerdings als zeitlich begrenzt aufzufassen.

Unterricht ist, Norbert Heinen und Wolfgang Lamers (2006) folgend, mit der Frage verbunden,

> was im Unterricht als absichtsvoll gestalteter Erziehungs- und Bildungsprozess inszeniert werden soll, damit durch elementare oder fundamentale Einsichten dem Kind oder Jugendlichen ein exemplarischer Ausschnitt der geistig erkannten oder gestalteten Welt aufgeschlossen wird. (143f.)

A.F. Zimpel (2014) folgend, kann Unterricht als Lernen in der Zone der nächsten Entwicklung – auf die im Verlauf der Arbeit noch vertiefend eingegangen werden wird – gedacht werden, wobei durch die Kooperation mit einer kompetenten anderen Person, die Hilfen zur Problembewältigung zur Verfügung stellt, durch Unterricht Lernen und Entwicklung erfolgen (vgl. ebd., 50 mit Referenz auf Vygotskij). Für den Begriff des Unterrichts bedeutet dies, dass er keinesfalls ausschließlich auf das System und die Institution Schule beschränkt bleiben muss – Unterricht in der Schule bedingt nicht automatisch Lernen und Entwicklung. Vielmehr wird der enge Bezug von Entwicklung und Unterricht deutlich, sodass die Frage nach der Passung von Hilfe zur Bewältigung einer Aufgabe im Unterricht und die Entwicklung entsteht. (vgl. ebd.) Demnach fokussiert A.F. Zimpel stärker auf die Ebene der Vermittlung als W. Lamers und N. Heinen dies unter Bezug auf W. Klafki tun.

In der kontroversen Diskussion um den Bildungsbegriff und die Verabschiedung von der ausschließenden Annahme der Bildungsunfähigkeit werden die Bedeutung von Therapie, Pflege und Förderung als vermeintliche Gegenspieler oder als ergänzende Elemente von Unterricht, Erziehung und Bildung konzipiert (vgl. Lamers & Heinen 2006, 150ff.). Auf eine ausschließende Haltung des gesamten Erziehungs-, Bildungs- und Unterrichtssystem (EBU) weist auch Georg Feuser (1995) in aller Deutlichkeit hin.

Pflege wird als Handlung gefasst, die dazu dient, menschliche Grundbedürfnisse zu befriedigen und ist eng mit dem Gedanken der Versorgung verbunden (vgl. Heinen 2003, 125). *Therapie* wird heutzutage „als Maßnahme zur Verbesserung und Unterstützung der Lebenssituation kranker Menschen“ (Heinen 2003, 125) aufgefasst, wobei „Krankheit eine Variante menschlichen Seins“ (ebd.) darstellt. *Förderung* wird „in engem Zusammenhang mit der gestörten oder verzögerten Entwicklung behinderter Kinder [und Jugendlicher; P.S.] thematisiert“ (ebd., 126) und

die als solche aufgefasste Entwicklung „scheint Anlass für und Ziel von Förderung zu sein." (ebd.)

Es sei an dieser Stelle deutlich darauf hingewiesen, dass Pflege und Therapie trotz der hinter den Begriffen ersichtlichen defizitären Beurteilungs- und Zuschreibungstendenzen hinsichtlich ihres inklusiven und entwicklungsbezogenen Potenzials auch anzuerkennen sind. Jedoch wird die Grundhaltung, dass jede bzw. jeder Lernende einen Anspruch auf Erziehung, Bildung und Unterricht hat als unabdingbar angesehen.

Nach der inhaltlichen Klärungen dieser Begrifflichkeiten sei nachfolgend und vor der Vorstellung der MRD auf die Begriffe Heterogenität, Differenzlinien und Intersektionalität eingegangen.

1.4 Heterogenität, Differenzlinien und Intersektionalität (Schwarzenberg)

Das Anerkennen und die Wertschätzung von Vielfalt können als Ideal auf gesellschaftlicher Ebene angesehen werden, das durch Inklusion, gedacht als Prozess, erreicht werden soll. Wenn Inklusionsprozesse erfolgreich sind, dann ist Heterogenität keine Differenzlinie mehr, um Ein- oder Ausschlussprozesse zu initiieren, sondern Vielfalt selbstverständlich (vgl. Katzenbach 2017, 125f.). Inklusion „stellt die Regelschulen vielmehr vor die weit anspruchsvollere Aufgabe, ihren Umgang mit der Unterschiedlichkeit ihrer Schülerinnen und Schüler neu zu ordnen." (ebd., 126) Dabei hat es vor dem Aufkommen der Debatte um (schulische) Inklusion zuvor auch niemals eine homogene Lerngruppe gegeben. Dies liegt trotz Homogenisierungsbestrebungen, wie dem Zurückstellen des Schuleintritts, dem Sitzenbleiben oder der Selektion entlang verschiedener Schulformen, darin begründet, dass es keine normative Entwicklung des Lernverhaltens von Menschen gibt, da jede Person individuell ist und demnach subjektspezifische Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen in schulische Bildungsprozesse einbringt (vgl. Budde 201, 15). Dabei gilt es anzumerken, dass jedem Menschen auch allgemeinmenschliche Entwicklungspotenziale zu eigen sind.

Gegenwärtig werden Inklusions- und Exklusionsprozesse von Personen und Personengruppen durch die Konstruktion und Anwendung von Differenzkategorien gesteuert. Diese Differenzkategorien werden wiederum als Dimensionen von Heterogenität, also menschlicher Vielfalt, aufgefasst. Diese Arbeit fokussiert auf die Inklusion in Schule und demnach in institutionalisierten Bildungsprozessen. Dadurch kommt es zu einer besonderen Beachtung und Gewichtung der

Kategorie sog. Behinderung sowie der Subkategorie der sog. geistigen Behinderung. Dies sind aber nicht die einzig denkbaren Kategorien, die Inklusions- und Exklusionsmechanismen im System Schule bedingen können.

Wendet man die Betrachtung beispielsweise dem Ansatz der *Intersektionalität* zu, so können Exklusion und Benachteiligung von Personen oder Personengruppen auch durch die Konstruktion von mehreren differenzstiftenden Merkmalen bedingt werden. Exemplarisch können Ausschluss und Diskriminierung farbiger Frauen auf das Zusammenspiel genau dieser beiden Differenzkategorien (Geschlecht und Ethnie) beim Ausschluss aus einem Beschäftigungsverhältnis aus der amerikanischen Rechtsprechung zurückgeführt werden. (vgl. Crenshaw 2013, 37ff.)

Hinter dieser Annahme liegt das metaphorische Bild einer Kreuzung (engl. intersection). Bei einer Kreuzung kommt es zu einem Schnitt von mindestens zwei Straßen in einem Punkt, gleichwohl sind auch wesentlich größere Kreuzungen vorstellbar. Jede dieser Straßen, die sich in einem Punkt kreuzen, kann eine Differenzkategorie darstellen. Diese Überschneidung steht bildlich für eine Person, die mehrere differenzstiftende Kategorien in ihrer Gesamtpersönlichkeit vereint. Kommt es zu einem Unfall in diesem Kreuzungspunkt im sozialen Verkehr, so entsteht nun eine Diskriminierung dieser Person – beispielsweise durch Exklusion oder Marginalisierung. Dies bedingt, dass intersektionelle Auffassungen kontextgebunden und relational zu verstehen sind. So kann diese Benachteiligung durchaus durch eine einzige Heterogenitätsdimension bedingt werden, ebenso ist aber auch das Zusammenspiel mehrerer Differenzkategorien innerhalb des Kreuzungspunkts denkbar, sodass es zu Ausschluss entlang mehrerer Kategorien gleichzeitig kommen kann. (vgl. ebd. 40f.)

Jede Person vereint in sich solche Kategorien, wobei sich das Komplexitätsmaß sowie die Konstrukte deutlich unterscheiden können. Des Weiteren ist anzunehmen, dass nicht jede differenzstiftende Kategorie konstant über die gesamte Lebensspanne erhalten bleiben muss. Sie können überwunden oder erworben werden, aber genau so sehr erhalten bleiben. Intersektionelle Analysen sollen „[s]tatt die Wirkung von zwei, drei oder mehr Unterdrückungen lediglich zu addieren (was schon schwer genug ist)“ (Winker & Degele 2009, 10) zeigen, „dass die Kategorien in verwobener Weise auftreten und sich wechselseitig verstärken, abschwächen oder auch verändern können.“ (ebd.) Gabriele Winker und Nina Degele (2009) heben für diese intersektionellen

Analysen das Zusammenspiel von Theorie und Empirie als Notwendigkeit eines Mehrebenenansatzes hervor (vgl. ebd., 11; 18). Sie „begreifen Intersektionalität als kontextspezifische, gegenstandsbezogene und an sozialen Praxen ansetzende Wechselwirkungen ungleichheitsgenerierender sozialer Strukturen (d.h. von Herrschaftsverhältnissen), symbolischer Repräsentationen und Identitätskonstruktionen." (ebd., 15) Es wird von Kimberlé Crenshaw (2013) deutlich hervorgehoben, dass gerade auch die beobachtenden, entschlüsselnden Personen zur Konstruktion von Heterogenität beitragen und dadurch Dekonstruktionsprozesse beeinflussen, was durchaus kritisch sein kann (vgl. Crenshaw 2013, 40f.).

Wendet man dieses verkürzt skizzierte Verständnis von Intersektionalität auf schulische Bildungsprozesse an, so sind weitere Kategorien denkbar, die Heterogenität und Differenz stiften können. Exemplarisch können neben sog. (geistiger) Behinderung auch Attribuierungen des sog. Schweregrades einer Behinderung treten, ebenso aber Erfahrungen von Migration, der sozioökonomische Status einer Person, Neurodiversität, Geschlechtskonstruktionen und der weiteren mehr (vgl. Ziemen 2018, 11ff.). Diese Aufzählung kann nicht vollständig sein und erhebt auch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Vielmehr soll diese Auffassung von Heterogenität im Kontext von Intersektionalität dafür sensibilisieren, dass Inklusions- und Exklusionsprozesse von vielfältigsten Konstrukten gesteuert werden können, gerade auch in institutionalisierten Bildungsprozessen. Gleichzeitig wird die Rolle der beobachtenden, bewertenden und Lern- und Entwicklungsangebote konstruierenden Personen beim Aufdecken sowie beim Auf- und Abbau von ein- oder ausschließenden Bedingungen deutlich. Denn „*Intersektionalität* bezeichnet die *Überschneidung* unterschiedlicher soziokultureller Differenzkategorien und die damit einhergehenden sozialen Positionierungen." (Budde 2017, 22f. mit Hervorhebung im Original)

Der Begriff der *Heterogenität* ist ebenfalls nicht trennscharf zu definieren und zu klären und wird häufig im Zusammenhang mit dem Begriff der *Differenz* behandelt.

Der Heterogenitätsbegriff beinhaltet sowohl überindividuelle Aspekte, die auf soziostruktureller Ebene Relevanz haben, wie etwa Migrationserfahrung oder Behinderung und gleichzeitig Aspekte auf individueller Ebene, worunter sich primär eine Orientierung an Fähig- und Fertigkeiten fassen lässt (vgl. Budde 2017, 14). *Differenz* ist in dieser Hinsicht als Folge von Heterogenität zu verstehen und gleichzeitig auch als Ursache von Heterogenität. Diese Zweiteilung der

Betrachtung des Heterogenitätsbegriffs macht bereits deutlich, dass Heterogenität nicht ausschließlich durch die unterschiedlichen Lernenden in der Schule bedingt wird, sondern auch dass das System Schule Heterogenität konstruiert und teilweise konstruieren muss. Die Konstruktion wird bei der Vergabe von Laufbahnempfehlungen oder berufsqualifizierenden Abschlüssen qua lege erwartet und demnach müssen Differenzen sichtbar werden. (vgl. Katzenbach 2017, 134; vgl. Budde 2017, 18) Individualität und individuelles Lernen sollen in der Schule realisiert werden und, obwohl rechtlich in der Schule der Anspruch auf universelle Gleichbehandlung verankert ist, ist Schule von differenzstiftenden Kategorien durchzogen und erzeugt demnach Heterogenität, bspw. sei auf das Zusammenspiel von sozioökonomischem Status und Erwerb von Bildungsabschlüssen verwiesen (vgl. Budde 2017, 21).

Auch im Kontext von Heterogenität und Differenz ist auf die machtvolle Rolle der zuschreibenden Person bzw. Personengruppe zu verweisen, da die Konstruktionen „als Produkt sozialer Aushandlungsprozesse“ (ebd., 20) aufgefasst werden. Heterogenität unterliegt der Existenzbedingung, nur relational zu Homogenität und demnach zu Gleichheit, bestehen zu können und ist als normativer, wenn auch positiv konnotierter Begriff anzunehmen (vgl. ebd., 20f.).

Zusammenfassend ergibt sich, dass Inklusion Vielfalt durch Heterogenität nicht ausschließlich auf die Differenzlinie Behinderung bezieht, sondern „Vielfalt unter den Lernenden als Chance und nicht als Belastung in den Blick zu nehmen und dabei möglichst alle Heterogenitätsdimensionen zu berücksichtigen [versucht, P.S.], die potenziell zu Bildungsbenachteiligungen führen können.“ (Katzenbach 2017, 124) Genau dies beinhaltet die Auseinandersetzung mit Heterogenität, Differenz und den Denkimpulsen aus dem Intersektionalitätsansatz.

Nachdem erarbeitet worden ist, dass Bildung, Erziehung und Unterricht im System Schule durch das Erzeugen und Aufrechterhalten von Heterogenität und Differenz maßgeblich beeinflusst werden, wird für die Verfassenden – entsprechend dieser Ebene der MRD – deutlich, dass eine Reflexion des Gesamtprozesses entlang von intersektionellen Perspektiven genauso unabdingbar ist, wie die Reflexion der eigenen Haltung, des Menschenbildes und des Entwicklungsverständnisses. Aus diesem Grund erfolgen die nachstehenden Ausführungen basierend auf den die MRD konstituierenden Perspektiven, wobei vor allem ein Schwerpunkt auf die Tätigkeitstheorie der kulturhistorischen Schule gelegt wird, die sowohl zur Reflexion des Selbst als auch des Gesamtprozesses Anregungen bietet.

Die nachstehend vorgestellte und auf den Gegenstand des Stellenwertsystems angewandte Mehrdimensionale Reflexive Didaktik Kerstin Ziemens (2018) ist als allgemeine Didaktik auf größtmögliche Heterogenität ausgerichtet (vgl. ebd., 91ff.). Sie zielt darauf ab, Erziehung, Bildung und Unterricht für *alle* Lernenden zu ermöglichen und differenzstiftende Heterogenitätsdimensionen durch ein hohes Maß an Reflexivität zugunsten inklusiver Prozesse aufzubrechen. Da im Rahmen der Masterarbeit ein Angebot für inklusiven Mathematikunterricht erdacht werden soll, wird hierauf innerhalb der Darstellung fokussiert werden.

2 Die Mehrdimensionale Reflexive Didaktik (Schwarzenberg)

Das nachfolgende Kapitel widmet sich allgemeiner Didaktik, die gerade auch inklusive bzw. integrative Kontexte einschließt. Die Mehrdimensionale Reflexive Didaktik von Kerstin Ziemen bestimmt die grundlegende Struktur der vorliegenden Arbeit. Eine vereinfachende Visualisierung ist in Abb. 1 dargestellt:

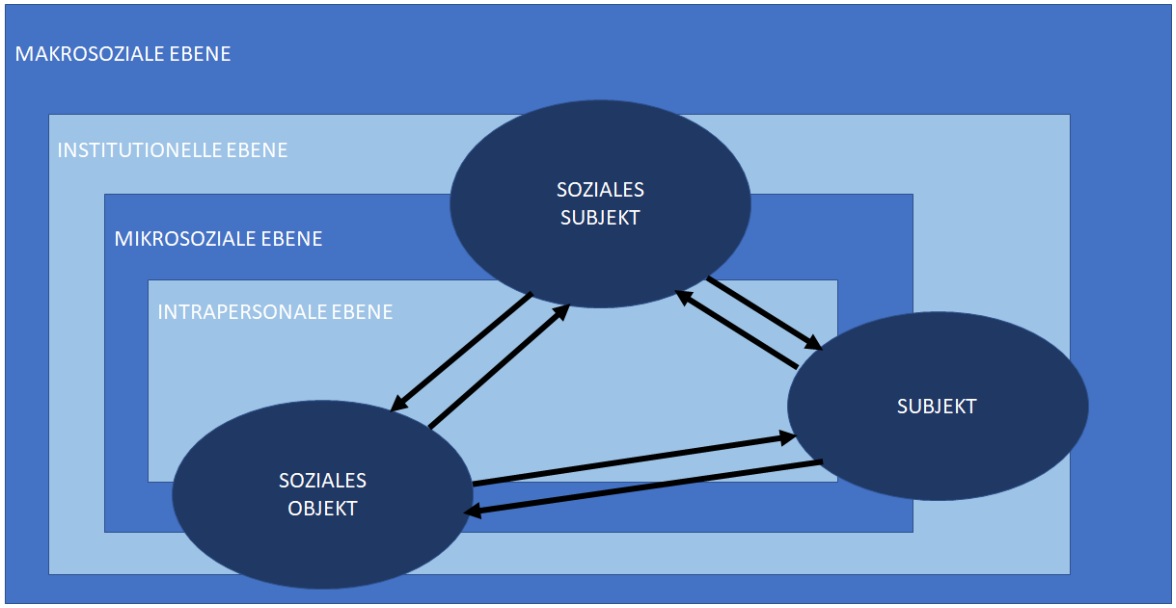

Abb. 1: Vereinfachte Darstellung der MRD nach K. Ziemen (2002; 2017a)

Da ihre Didaktik eine Fortführung der entwicklungslogischen Didaktik von Georg Feuser darstellt, wird diese didaktische Theorie ebenfalls vorgestellt unter expliziter Thematisierung einer ihrer umfassendsten Grundlagen – die tätigkeitstheoretischen Überlegungen der kulturhistorischen Schule aus der Sowjetunion, welche auch der MRD zugrunde liegen.

Grundsätzlich zeichnen sich die Didaktiken dadurch aus, dass sie jeden Menschen als per se kompetente Person ansehen und eine dementsprechende Grundhaltung in Diagnostik, Lernen und Entwicklung bewusst einfließen lassen (vgl. Ziemen 2010, 206). Insgesamt folgen die Ausführungen der Annahme, dass „[e]ine Integrative/Inclusive Pädagogik […] nur so gut sein [kann; P.S.] wie ihre Didaktik.“ (Ziemen 2010, 206) Denn: „[j]e unterschiedlicher wir sind, desto mehr können wir voneinander lernen. Je größer die Differenz zwischen den Menschen ist, desto differenzierter muss die zwischenmenschliche Kommunikation sein.“ (Manske 2010, 215) Da didaktische Theorien menschengemacht sind, beinhalten sie auch Annahmen über das

Menschsein, sein Lernen und seine Entwicklung und versuchen die komplexe und reichhaltige Lebenswirklichkeit in Relation zum Individuum unter dem Gesichtspunkt einer Fragestellung in sich schlüssig und möglichst kompakt zu erklären. Dies ist mit Abstraktion verbunden, dem bewussten Auslassen von Unwesentlichem – hierbei geht zwangsläufig Komplexität verloren. Wendet man jedoch die Theorie auf die Lebenswirklichkeit an, um Unterricht zu planen oder um eine Beobachtung zu erklären, so ist diese Erklärung oder Planung nur eine von vielen denkbaren Möglichkeiten, da verschiedene Theorien gebildet werden können – vor allem dadurch, dass die menschliche Wahrnehmung selektiv ist und demnach nie das Konkrete objektiv erfassen kann, sondern stets in einem subjektiven Teilausschnitt. (vgl. Rödler 2017, 10) Wolfgang Jantzen (2004) folgert durchaus umgangssprachlich, direkt ansprechend, aber zutreffend und mit Peter Rödler grundsätzlich übereinstimmend: „Nein, gute Theorie liefert Ihnen etwas anderes, ein Begriffssystem, mit dem Sie komplexe Situationen denken können, in denen Sie sind, mit dem Sie dort wieder Reflexivität erlangen, wo der Alltag Sie auffrisst.“ (49)

Die MRD hebt vor allem das Moment der Reflexivität hervor, das jeden Moment pädagogischen und didaktischen Handelns umfassen soll, um Inklusion schulisch unter Rückgriff auf tätigkeitstheoretische und entwicklungslogische Überlegungen realisierbar werden zu lassen. Die *Ebenen der Reflexion* sind

- die makrostrukturellen Aspekte,
- die Rollen der Akteur*innen im Feld,
- die Reflexion des Gesamtprozesses sowie des Selbst,
- das Verhältnis von Lernenden und Lerngegenstand und
- die didaktische Unterrichtsgestaltung. (vgl. Ziemen 2018; vgl. Ziemen 2017a, 6ff.)

Didaktisches Handeln bezieht sich auf die makrosoziale, institutionelle, mikrosoziale und intrapersonale Ebene. Dies bedeutet, dass in Schule durch Unterricht ein komplexes Feld eröffnet wird (vgl. Abb. 1). Makrostrukturelle Aspekte gestalten maßgeblich die institutionelle Wirklichkeit, die wiederum auf die dort agierenden Personen und letztlich auf die individuelle Entwicklung einwirken. Innerhalb der Institution Schule werden interpersonale Einflüsse zentral, die auf intrapersonale Lern- und Entwicklungsprozesse im Rahmen von Bildung einwirken. Die intrapersonale Entwicklung ist also letztlich von allen zuvor genannten Ebenen beeinflusst. (vgl. ebd., 3)

Wie bereits einleitend dargestellt, versteht sich die MRD als allgemeine Didaktik, die keine Lernenden ausschließt. Sie berücksichtigt verschiedene Systemebenen und denkt sie in Relation zueinander. Lernen, Entwicklung und Bildung werden schulisch in Form von Unterricht vermittelt und erlebbar. Das System Unterricht in Schule hingegen ist als komplexes didaktisches Feld gekennzeichnet, das als „sozialer Raum der Möglichkeiten“ (Ziemen 2018, 92) gedacht wird, in dem Lehren und Lernen in gemeinsamen Lern-, Handlungs- und Arbeitsfeldern möglich werden soll unter Erleben und Anerkennen von Vielfalt (vgl. ebd., 91f.). Aus diesem Anlass greift die MRD auf die bereits beschriebenen verschiedenen Ebenen zu, die es reflexiv zu durchdringen gilt. Sie werden nun im Folgenden skizziert und mit ausgewählten Inhalten angereichert. Die Auswahl der dargestellten Inhalte wird einleitend zu den Unterkapitel kurz begründet.

2.1 Reflexion des Gesamtprozesses und Selbstreflexion der Teammitarbeiter*innen (Schwarzenberg)

Die *Ebene der Reflexion des Gesamtprozesses und der Selbstreflexion der Lehrpersonen und Teammitarbeitenden* umfasst Reflexionsprozesse, die alle anderen Ebenen der MRD berühren. Die Selbstreflexion bezieht sich sowohl auf die Selbstwahrnehmung als auch die Selbstkontrolle. Sie kann implizite Annahmen und Befürchtungen bewusst sowie das eigene Kompetenzprofil erleb- und reflektierbar werden lassen. Dies kann zum Ausgangspunkt der Bewältigung von beispielsweise (Exklusions-)Risiken, didaktischen und sozialen Hürden, Stress und persönlichen Vorurteilen werden. (vgl. ebd., 109)

Die Reflexion des Gesamtprozesses referiert auf alle weiteren Ebenen der MRD und führt zu einem Bewusstsein über hemmende und unterstützende Aspekte für inklusive Bildungsangebote. Im Zusammenspiel also tragen die Reflexion des Selbst und des Gesamtprozesses dazu bei, die Kooperation und Tätigkeit im Rahmen der eigenen Möglichkeiten auf allen Ebenen positiv zu beeinflussen. Die Reflexion profitiert von der Kooperation der Teammitarbeitenden und der Lehrpersonen genauso sehr wie jede andere Ebene der MRD, die beispielsweise Planung und Durchführung von Unterricht betreffen. Reflexive Prozesse können zusätzlich durch die Inanspruchnahme supervisorischer Angebote unterstützt werden. (vgl. ebd., 109f.)

Die Reflexion also bezieht sich auf den Ist-Stand und die vorausgegangene Aktivität und bietet mögliche Perspektiven für die Fortführung – sie trägt nach Auffassung der Verfassenden wesentlich zur Ausprägung einer inklusionsorientierten Haltung bei. Damit diese Reflexionen erfolgreich sein können, gilt es in einem ersten Schritt die Genese von sog. Behinderung aus einer sozial- und einer personenorientierten Sichtweise zu betrachten. Anschließend wird in einem zweiten Schritt über den Einfluss der eigenen Haltung, des Menschenbildes und des Entwicklungsverständnisses reflektiert. Dies wird in einem dritten Schritt mit tätigkeitstheoretischen Überlegungen der kulturhistorischen Schule angereichert werden, die es ermöglichen, im Kontext inklusiver Bildung reflexiv zu handeln und zugleich die eigene Haltung kritisch zu betrachten.

Insgesamt ergibt sich eine „Triade der Vermittlung“ (Ziemen 2002, 137), die zwischen dem sozialen Subjekt des/der Lernenden, dem sozialen Objekt, dem Lerngegenstand und eines beobachtenden Subjekts entsteht (vgl. Abb. 1).

Das soziale Subjekt wird gedacht als Schülerin oder Schüler, mit den individuellen Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen. Das soziale Objekt umfasst den Lerngegenstand, den es sachstrukturanalytisch zu entschlüsseln und aufzubereiten gilt, sodass seine invarianten Strukturen hervortreten. Das weitere Subjekt ist eine beobachtende, analysierende und reflektierende diagnostisch tätige Person, die die Tätigkeit des sozialen Subjekts im Umgang mit dem sozialen Objekt fokussiert und in dialogischem und kooperativen Austausch mit dem sozialen Subjekt, der Lernerin bzw. dem Lerner, steht. (vgl. Ziemen 2002, 137)

Dass diese Reflexionsebene der MRD eine besondere Bedeutung für die Realisation schulischer Wirklichkeit hat, sei im nachstehenden Kapitel veranschaulicht.

2.1.1 Entwicklung – Haltung – Menschenbild (Rosemann)

Nach der Klärung einiger wesentlicher Begriffe des EBU bezieht sich die folgende These auf die Haltung der Lehrpersonen, also der Personen, die institutionalisiert Erziehung, Bildung und Unterricht realisieren:

Die Reflexion der eigenen Haltung zum Menschen und seiner Entwicklung und die Reflexion der daraus resultierenden Gestaltung seiner materiellen und sozialen Umwelt ist eine notwendige Voraussetzung für Lehrpersonen, um eine konstruktive Entwicklung aller Schülerinnen und Schüler zu ermöglichen.

Diese These sei nachstehend anhand dreier Zugänge dargelegt.

Einem Verständnis des Menschen kann man sich nach Georg Feuser (1995, 84ff.) angesichts seiner Komplexität nur als Einheit von biologischen, psychischen und sozialen Aspekten nähern. Dieses lebendige System ‚Mensch' ist dabei erstens durch seine Selbstorganisationsfähigkeit und zweitens durch seine Offenheit gegenüber seinen äußeren Randbedingungen gekennzeichnet (vgl. ebd., 85). Es hat grundsätzlich die Fähigkeit, angesichts seiner bisherigen Geschichte auf veränderte äußere Bedingungen kompetent zu reagieren und sich hin zu einem funktionalen Stadium der Stabilität zu verändern (vgl. ebd., 116). In diesem Zusammenhang ist zu betonen, dass die Selbstorganisation nur im Austausch mit der (sozialen) Umwelt geschehen kann, dass also sowohl die eigene aktive Auseinandersetzung mit der Welt, als auch die realisierten und verwehrten (sozialen) Randgegebenheiten Bedingungen für Entwicklung sind (vgl. ebd., 104). Dabei ist die zukünftige Entwicklung des Systems – obwohl durch die Biographie

und Dispositionen beeinflusst – nie vorhersehbar oder determiniert, sodass davon ausgegangen werden muss, dass jeder Mensch als System, welches auf die Zukunft orientiert ist, über nicht bestimmbare Entwicklungschancen verfügt, deren Entfaltung von den realisierten Umweltbedingungen abhängig ist (vgl. ebd., 120f.).

Die Frage nach dem Verlauf menschlicher Lern- und Entwicklungsprozesse kann der Theoriebildung der sowjetischen kulturhistorischen Schule folgend in ähnlicher Weise beantwortet werden.

Innerhalb dieses ursprünglich psychologischen, inzwischen aber allgemein humanwissenschaftlichen Theorieansatzes, der im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts von Lev S. Vygotskij, Aleksandr R. Lurija und Aleksej N. Leont'ev – der ‚Troika' – begründet wurde, standen der gesellschaftliche Mensch und die Ausbildung des Psychischen unter Einfluss (1.) der *Naturgeschichte*, (2.) der *Kulturgeschichte* als selbst geschaffener zweiter Natur und (3.) der ontogenetischen *Individualgeschichte* im Fokus (vgl. Kölbl 2010, 182ff.). Die menschliche Entwicklung wird dabei konsequent im Kontext der durch gemeinsame Tätigkeit mit anderen geschaffenen Kultur betrachtet (vgl. Rahde 2012, 169).

Die Gesellschafts- und Kulturgeschichte betreffend ist eine wesentliche Erkenntnis der kulturhistorischen Schule, dass in der Phylogenese des Menschen die Kooperation und der Werkzeuggebrauch sowohl konkreter Werkzeuge als auch psychischer Werkzeuge, etwa der Sprache, zur Ausbildung höherer Formen des Psychischen, der höheren psychischen Funktionen, führten (vgl. Kölbl 2010, 184). So kann etwa am Beispiel des Gedächtnisses angenommen werden, dass phylogenetisch durch äußere Gedächtnishilfen (etwa Kerben oder Abdrücke in Ton) und ihrer weiteren Elaborierung innere Gedächtnishilfen entstanden, die dann eine höhere Funktion des Gedächtnisses ermöglichten (vgl. ebd., 184f.). Diese veränderte, innerhalb der kooperativen Gesellschaft entstandene Kultur, wird wiederum innerhalb der Individualgeschichte im Zuge einer Enkulturation angeeignet, nutzbar gemacht und dient als Ausgangspunkt für ihre Weiterentwicklung (vgl. ebd., 185).

Höhere psychische Funktionen und die damit verbundenen Bewusstseinsprozesse sind also durch psychische Werkzeuge, wie Sprache oder Symbole, vermittelt, wobei ebendiese Werk-

zeuge aus der Gesellschaft und Kultur entstanden (vgl. Lompscher 2004, 35). In ihnen ist „gesellschaftliches Wissen und Können (Erfahrungen, Kenntnisse, Handlungsverfahren, Methoden und Strategien) vergegenständlicht“ (ebd., 61).

Dabei ist das Verhältnis vom Mensch zur Wirklichkeit immer und von Beginn der Entwicklung an ein soziales (vgl. Rahde 2012, 173). Denn die substanzielle Annahme der kulturhistorischen Schule ist, dass die Entwicklung aller höheren psychischen Funktionen nicht nur durch Werkzeuge (auch: äußere und innere Mittel) vermittelt ist, sondern dass sie in der Ontogenese stets zwei Etappen durchläuft, nämlich zuerst als interpsychisches Verhältnis zwischen Menschen und dann als intrapsychische Gegebenheit im Subjekt (vgl. Hoffmann 2008, 181 mit Bezug auf Vygotskij). Die Zone der nächsten Entwicklung (Vygotskij) ist ein Fall dieses Entwicklungsgesetzes (vgl. Rahde 2012, 174) – auf diese wird an späterer Stelle ausführlich einzugehen sein.

Innerhalb der Zone der nächsten Entwicklung[1] ist jegliche Vermittlung eine Vermittlung von *rudimentärer* und *ideeller* Form (vgl. ebd., 174 mit Bezug auf Jantzen). Die Entwicklung höherer psychischer Funktionen verläuft zum einen von der gesellschaftlich und kulturell geprägten ideellen Form (repräsentiert durch eine andere Person) hin zur individuell konstruierten rudimentären Form des Subjekts und zum anderen von der rudimentären Form des Menschen hin zur ideellen Form der Kultur (vgl. ebd., 176). Dies sind grundlegende Gesetzmäßigkeiten der Vorstellung der Zone der nächsten Entwicklung (vgl. ebd.).

Das emotional geprägte Erleben des Menschen ermöglicht und leitet dabei den Prozess von rudimentärer zu ideeller Form, während das kooperative Moment den Prozess von ideeller zu rudimentärer Form beeinflusst (vgl. ebd. mit Bezug auf Jantzen). Die ideelle Form wird in diesem Prozess interiorisiert und geht als rudimentäre Form in die psychischen Strukturen des Subjekts ein (vgl. ebd., 178). Der Interiorisationsprozess, der zuvörderst von der zwischenmenschlichen Tätigkeit ausgeht, vollzieht sich also in der Zone der nächsten Entwicklung. Diese ist – im Gegensatz zur Zone der aktuellen Entwicklung, in der Handlungen entsprechend der Ziele selbstständig ausgeführt werden können – zu verstehen als der Möglichkeitsraum, in dem in kooperativer Tätigkeit neue Handlungen und Motive realisiert werden, die das Subjekt alleine

[1] Die Zone der nächsten Entwicklung ist nicht, wie häufig missverstanden, allein im Verlauf der Kindesentwicklung, sondern immer, im Sinne eines allgemeinmenschlichen Entwicklungsprinzips wirksam (vgl. Rahde 2012, 173).

nicht, wohl aber mit anderen zu vollziehen vermag (vgl. Hoffmann 2008, 190). Die Zone der nächsten Entwicklung ist daher nur dort anzutreffen, wo sich Funktionen bereits in der Reifung befinden (vgl. Rahde 2012, 172).

Als Interiorisation wird der Übergang äußerlicher Tätigkeiten und Handlungen in innere Tätigkeiten und Handlungen verstanden, wobei mit Davydov und Vygotskij kollektive Tätigkeit zu individueller Tätigkeit wird (vgl. Lompscher 2004, 68f.). Es wird also davon ausgegangen, dass „gesellschaftliche Formen der Tätigkeit auf das menschliche Gehirn einwirken und es zwingen, neue neuronale Verknüpfungen und neue funktionelle Systeme hervorzubringen“ (Rahde 2012, 175).

Dabei ist der Begriff der Tätigkeit für das Verständnis des (der) Menschen zur (gesellschaftlich-kulturell beeinflussten) Welt zentral. Die Tätigkeit ist das wesentliche Bindeglied zwischen Objekt und Subjekt sowie Subjekt und Subjekt, mit dem „sich der Mensch aktiv mit der Welt, den Dingen der Welt, mit anderen und sich selbst auseinander“ (Ziemen 2018, 54) setzt. Sie ist also „grundlegende Existenzweise des Menschen“ (Lompscher 2004, 16) – durch sie werden Teile der Welt zu Gegenständen der Tätigkeit, die entsprechend der verfügbaren Werkzeuge (Mittel) und entsprechend der subjektiven Motive und Ziele verändert werden (vgl. ebd.). Tätigkeit hat also immer auch einen Gegenstand, auf den sie gerichtet ist, ist also gegenständliche Tätigkeit, wobei die Gegenstände der Tätigkeit immer vom Subjekt als ein Ausschnitt der Wirklichkeit gewählt werden (vgl. ebd., 59f.). Die Tätigkeit geht dabei von einem Subjekt aus, welches Bedürfnisse zur Aufrechterhaltung seiner Systemorganisation hat, die unter Einfluss des Gegenstands der Tätigkeit zu einem konkreten Motiv, zu einem Sinn der Tätigkeit werden (vgl. Hoffmann 2008, 181f.). Jede Tätigkeit und entsprechende Handlungen gehen also von einem Motiv aus und sind auf ein Ziel gerichtet (vgl. Lompscher 2004, 20).

Vorherige Ergebnisse der Tätigkeit gehen wiederum in weitere Tätigkeiten ein (vgl. ebd., 60), da erstens die Umwelt verändert wird und zweitens psychische Strukturen verändert werden. Auch zwischen der Kultur als geschaffener zweiter Natur und dem Subjekt vermittelt die Tätigkeit in zweifacher Weise, da der Mensch sich durch sie die Kultur aneignet und die Kultur durch die Tätigkeit des Menschen verändert wird (vgl. ebd., 12). Daher ist Tätigkeit „vermittelnd (die Beziehung zwischen Mensch und Welt) und zugleich vermittelt (durch Werkzeuge praktischer und theoretischer Art, insbesondere sprachliche und andere Zeichen, als Resultate menschlicher

Tätigkeit im Prozess der gesellschaftlich-kulturellen Entwicklung)“ (ebd., 28). Dies gilt auch für die innere Tätigkeit, die durch Zeichen als Bedeutungsträger vermittelt – also durch Mittel zugänglich gemacht – wird, womit sie über eine vergleichbare Struktur zur äußeren Tätigkeit verfügt (vgl. ebd., 62).

Also eignet sich der Mensch durch die Tätigkeit Abbilder der Gegenstände der Welt an, die in einer Ausprägung vom Sinnlich-Konkreten bis Abstrakten in die psychischen Strukturen übernommen werden, wobei diese Abbilder wiederum als Grundlagen für weitere Tätigkeiten dienen (vgl. ebd., 83). Diese Abbilder tragen kulturell-gesellschaftliche objektive Bedeutungen in individualisierter Form, welche durch Zeichen ver-mittelt sind (vgl. ebd., 84f.).

An dieser Stelle sei auf die Kategorie des Sinns verwiesen, die im Gegensatz zur Bedeutung den persönlichen Wert umfasst. Somit umfassen die Begriffe Bedeutung und Sinn eine doppelseitige Gegebenheit zwischen Kulturell-Gesellschaftlichem und Individuellem, die sich gegenseitig erst konstituieren (vgl. ebd., 85f.). Der Sinn entsteht während der Tätigkeit (vgl. ebd., 175).

Angedeutet ist hier zudem, dass es keine individuelle Tätigkeit in der Hinsicht geben kann, dass sie losgelöst von gesellschaftlichen Zusammenhängen wäre, sie ist immer „(unmittelbar oder mittelbar) gemeinsame Tätigkeit“ (ebd., 16) und kann daher nicht außerhalb der gesellschaftlichen, kulturellen und sozialen Zusammenhänge betrachtet werden, muss als Einheit im gesellschaftlichen Menschen – auch als Individuum – verstanden werden (vgl. ebd., 61f.).

Andererseits ist die Tätigkeit, durch die sich der Mensch die Kultur aneignet, immer auch aktive, vom Individuum ausgehende konstruierende Tätigkeit (vgl. ebd., 12). Sie ist als das Ergebnis der eigenaktiven Transformation des Kulturellen und Gesellschaftlichen durch die Tätigkeit in die individuelle psychische Struktur zu begreifen (vgl. ebd., 16). Dabei hängt der Erfolg der Aneignung davon ab, ob die Tätigkeit dem Gegenstand und dem Subjekt gegenüber in Passung ist (vgl. ebd., 17).

An dieser Stelle sei aufgrund des Einbezugs innerhalb des pädagogischen und didaktischen Diskurses in den vergangenen Jahrzehnten kurz auf das Verhältnis der kulturhistorischen Schule zum Konstruktivismus eingegangen. Festzustellen ist, dass die Vorstellung, der Mensch würde seine wahrgenommene Welt (also sein Wissen, seine Vorstellungen und Begriffe) selbstständig

konstruieren, beiden Denkschulen gemein ist (vgl. ebd., 26). Der kulturhistorische/tätigkeitstheoretische Ansatz geht aber nun davon aus, dass durch die Tätigkeit, durch die (erfolgreiche, also der vorherigen Zielsetzung entsprechende) Veränderung der Welt, real existierende Gesetzmäßigkeiten genutzt werden, dass also eine Umwelt auch außerhalb der Konstruktionen angenommen werden kann (vgl. ebd., 26f.). Viele Annahmen, die im pädagogischen und didaktischen Kontext vom aktiv-konstruierenden Menschen ausgehen, sind daher auch im Lichte der kulturhistorischen Schule zu teilen und anzuwenden.

Auch dem Entwicklungsverständnis der kulturhistorischen Schule/Tätigkeitstheorie entsprechend, geht alle Entwicklung sowohl von anderen, als auch vom Individuum aus. Gleichzeitig kann sich die Psyche nur in dem Maße fortentwickeln, in dem das Individuum an kulturellen und gesellschaftlichen Errungenschaften partizipieren kann und in dem Maße, wie es sozial eingebunden ist, wie es in der Zone der nächsten Entwicklung mit anderen und durch andere tätig sein kann.

Einen weiteren Zugang, der die eingangs aufgestellte These darlegt, stellt der von Kerstin Ziemen (2013) unter Einbezug der Kapitaltheorie Pierre Bourdieus herausgearbeitete Begriff der Kompetenz dar, der auch innerhalb des kulturhistorischen Diskurses bisher kaum Verwendung findet (vgl. Lompscher 2004, 23).

Ausgangspunkt der Überlegungen ist, dass die Lebenschancen der Menschen nicht gleich verteilt sind, wie dies beim „Roulette“ (Bourdieu 1983, 183) der Fall ist, sondern dass es das über die Zeit akkumulierte Kapital ist, das „dafür sorgt, daß nicht alles gleich möglich oder gleich unmöglich ist“ (ebd., 184). Ähnlich dem Matthäus-Prinzip – wer hat, dem wird gegeben – bestimmt das individuell verfügbare Kapital „über die Erfolgschancen der Praxis“ (ebd., 184). Unterschieden wird dabei (I.) das ökonomische Kapital, welches „unmittelbar oder direkt in Geld konvertierbar“ (ebd., 186) ist, (II.) das kulturelle Kapital, welches erstens in dem System Mensch verinnerlicht als inkorporiertes Kulturkapital, zweitens in materialisierter Form als objektiviertes Kulturkapital oder drittens institutionalisiert in Form von Titeln und Zugangsberechtigungen auftritt, sowie (III.) das soziale Kapital als die Menge der „aktuelle und potentielle Ressourcen […] eines dauerhaften Netzes von […] *Beziehungen*“ (ebd., 191, Hervorhebung im Original).

Bourdieu (1983, 185) folgend können mit dem Maß an gesamtem Kapital (welches zusammenfasst das übergeordnete symbolische Kapital als Anerkennung/Reputation beschreibt) also die Macht und somit die individuellen Lebenschancen beschrieben werden. Er stellt sich in diesem Kontext gegen die Vorstellung, dass sich „schulischer Erfolg oder Mißerfolg auf die Wirkung natürlicher ‚Fähigkeiten'" (ebd., 186) zurückführen lasse. Vielmehr reproduziere das Erziehungssystem die Sozialstruktur einer Gesellschaft und den Status quo der Klassen, indem das Kapital, welches (auch) innerhalb der und durch die Familie im Kind akkumuliert wurde, entsprechend bekräftigt wird (vgl. ebd., 186).

Anhand dieses Zusammenhangs ist nun auch erkennbar, dass „Fähigkeiten, Fertigkeiten, das Können bzw. Vermögen […] erst dann zur Kompetenz [werden, T.R.], wenn es durch andere anerkannt und wertgeschätzt wird" (Ziemen 2013, 21). Denn je mehr innerhalb der gesellschaftlichen Systeme Menschen anerkannt und werteschätzt werden, umso wahrscheinlicher ist es, dass sie dazu befähigt werden, Sachkompetenz zu erwerben (vgl. ebd. mit Bezug auf Bourdieu). Kerstin Ziemen (2013) konstatiert: „Jegliche Kompetenz ist damit ‚soziale Kompetenz'" (21). Somit ist mit dem Begriff der Kompetenz stets ein Komplex aus *Fähigkeiten/Fertigkeiten* (die in ihrer Geschichte auch aus Akten der Anerkennung und dementsprechend gestalteter Anforderungen erwachsen sind) und der *Anerkennung* als symbolisches Kapital sowie *Haltungen/Einstellungen*, die ebenso den Akt der Anerkennung beeinflussen (vgl. ebd., 22).

Diesem Verständnis folgend, existiert Kompetenz daher nicht als objektive Größe, sondern ist durch Zuschreibungsprozesse beeinflusst (und entstanden) und wird daher gesellschaftlich „anerkannt bzw. aberkannt" (ebd., 23).

Die eingangs aufgeführte These über den Zusammenhang von Haltung und Entwicklung wird anhand der knapp dargestellten theoretischen Zugänge verständlich. Das offene System Mensch muss unter Einfluss äußerer Faktoren zu einem zukunftsorientierten Stadium des Gleichgewichts gelangen, wobei die zukünftige Entwicklung des Systems nicht vorhersehbar ist. Die Welt wird vom Subjekt dabei in der Tätigkeit teilweise interiorisiert und zugleich verändert, wozu jedoch immer mittelbar oder unmittelbar der andere Mensch vonnöten ist. Entwicklung ist diesem Verständnis folgend immer Ko-Entwicklung, immer beeinflusst von der Interaktion und der gemeinsamen Tätigkeit mit anderen. Jedes individuelle Vermögen war zuvörderst geteiltes Vermögen und konnte letztlich nur deshalb individuelle Kompetenz werden, weil andere

Menschen diese anerkannten und den Glauben an die Entwicklung hatten. Die Reflexion der eigenen Haltung, des eigenen Menschenbilds und des subjektiven Entwicklungsverständnisses beeinflusst also die tatsächliche Entwicklung in hohem Maße. Vor dem Hintergrund dieser Erkenntnisse, die oft im didaktischen Kontext unberücksichtigt bleiben, sind alle didaktischen Konzepte und Methoden zu analysieren. Dieser Zusammenhang ist – wie noch zu zeigen sein wird – auch bezüglich des Konstrukts der sog. Behinderung wesentlich, da es vor dem Hintergrund dieses Prozesses produziert wird.

2.1.1.1 Die Tätigkeitstheorie (Schwarzenberg)

Im Folgenden wird der Tätigkeitsbegriff allgemein unter Einbezug der verschiedenen führenden Tätigkeiten, der Unterscheidung von Handlungen und Operationen sowie der Orientierung an Zonen der Entwicklung skizziert. Des Weiteren finden die etappenweise Interiorisation von Operationen und Begriffen Berücksichtigung sowie die Orientierung an invarianten Strukturen innerhalb von Orientierungsgrundlagen.

Tätigkeit wird als Vermittlerin zwischen einem Subjekt, einer aktiv handelnden Person, und einem Objekt, einem Lerngegenstand oder einer Sache, verstanden (vgl. Ziemen 2010, 199). Gleichzeitig ist sie Vermittlerin zwischen zwei Subjekten. „Führende Tätigkeiten kennzeichnen die Art und Weise, wie sich Menschen (hier die Schüler*innen) Welt aneignen.“ (Ziemen 2018, 55) Jeder Mensch setzt sich vermittelt durch Tätigkeit mit der individuellen Lebensumwelt auseinander und entwickelt dadurch die eigenen, aber kulturhistorisch entstandenen, psychischen Funktionen – dies geschieht über die gesamte Lebensspanne hinweg und gilt unabhängig von den individuellen Entwicklungsdispositionen (vgl. Terfloth & Bauersfeld 2015, 54, 155). Eine Tätigkeit wird durch eine Verkettung von Handlungen und Operationen realisiert – dies wird noch erläutert werden. Hierbei sind die Übergänge zwischen den führenden Tätigkeitsformen mit krisenhaften Umbrüchen verbunden, sodass Entwicklung nicht als kontinuierlich-linearer Prozess, sondern in qualitativen Entwicklungssprüngen verläuft. Die führende Tätigkeit zeigt sich demnach in der Form zwischen der Zone der aktuellen Entwicklung in Richtung der Zone der nächsten Entwicklung. (vgl. ebd., 105f.) Dies ist verwoben mit der Annahme, dass das Lernen der Entwicklung vorauseile und nicht – wie von Piaget angenommen – dass die Entwicklung dem Lernen vorausgehe (vgl. Bormann 2004, 81; vgl. Gal’perin 2004, 15).

2.1.1.2 Tätigkeit als Vermittlerin zwischen Lernenden und Lerngegenstand (Schwarzenberg)

„Tätigkeit ist die Bewegungsform des Subjekts bezogen auf ein Objekt, die von den bedürfnisrelevanten Aspekten des Objekts für das Subjekt ausgeht.“ (Jantzen 2004, 44) Subjektive Tätigkeit ist motiv- und gegenstandsgebunden und zielt auf emotionale Erfülltheit durch die Handlung ab, die im Rahmen von Tätigkeit zielgebunden realisiert wird (vgl. ebd.).

Folgt man Wolfgang Stegemann (1983), so ist Bildung „subjektive Tätigkeit und als solche eine spezifische Qualität derselben.“ (ebd., 84) Dies impliziert, dass Bildung zum einen in der Tätigkeit als gegenwärtiges Vermögen zum Ausdruck kommt sowie zum anderen eine Bewegung hin auf ein höheres psychologisches Niveau der Tätigkeit ist (vgl. ebd.; Siebert 2010, 112).

Beide Ausführungen also haben gemeinsam, dass Tätigkeit von einem aktiven Subjekt verrichtet wird und eine motivierte Bewegung auf etwas zu ist. Demnach lässt sich die Tätigkeit, wie bereits ausgeführt, als Vermittlerin zwischen Subjekt und Objekt verorten.

Des Weiteren ist Tätigkeit als ein System zu verstehen, das aus funktionellen und strukturellen Teilen besteht sowie eine eigene Dynamik und Übergänge aufweist (vgl. Rahde 2012, 183). Die funktionellen Teile von Tätigkeit umfassen den Orientierungs-, Ausführungs-, Kontroll- und Korrekturteil. Die strukturellen Teile menschlicher Tätigkeit umfassen „das Motiv, das Ziel, den Gegenstand, den Komplex der Operationen, die Orientierungsgrundlage der Tätigkeit“ (Talyzina 2013., 225). (vgl. ebd., 224f.)

Innerhalb der kulturhistorischen Schule kommt es zu einer Unterscheidung von sechs Tätigkeitsarten, die im Folgenden skizziert werden sollen. Es handelt sich um die perzeptive Tätigkeit, die gegenständliche Tätigkeit, die manipulierende Tätigkeit, das Spiel, das Lernen und die Arbeit. Zurückzuführen ist das Konzept der führenden oder dominierenden Tätigkeit auf Aleksej N. Leont’ev. Innerhalb einer Lebensalterspanne eines Menschen ist eine Tätigkeitsform führend. In kooperativer Erfahrung innerhalb der Zone der nächsten Entwicklung wird dann bei erfolgreicher Aneignung ein Übergang von einer führenden Tätigkeit zur nächsten erzielt. Hierbei bleiben die vorausgegangenen Tätigkeitsformen im Subjekt erhalten, auch wenn sie nicht mehr die führenden sind und qualitativen Umstrukturierungen unterworfen werden können (vgl. Ziemen 2018, 55). Demnach kommt es zur Ausbildung und Umgestaltung des Psychischen.

Gleichzeitig sind auch stets höhere Tätigkeiten angebahnt und werden in Handlungen realisiert, auch wenn sie (noch) keine führenden Tätigkeiten sind. Die führende Tätigkeit zeigt sich im Übergangsbereich zwischen der Zone der aktuellen Entwicklung und der Zone der nächsten Entwicklung (vgl. Winther 2012, 270f.). Ein Schwerpunkt wird im Folgenden auf die Lerntätigkeit gelegt werden.

Die *perzeptive Tätigkeit* ist auch bekannt als Wahrnehmungstätigkeit. Hierbei steht die sinnliche Wahrnehmung im Vordergrund. Die zwischenmenschliche Interaktion ist von hoher Bedeutung, genauso sehr wie die Anbahnung von Bewegungen in Richtung von Gegenständen. (vgl. Terfloth & Bauersfeld 2015, 106) Es findet eine Entwicklung dahingehend statt, dass die Hand dem Auge folgt - und nicht umgekehrt. Diese Bewegungsform wird interiorisiert (vgl. Jantzen 1987, 199).

Die *manipulierende Tätigkeit* ist auf Personen und Gegenstände in der Lebensumwelt bezogen. Es kommt dem Wechselspiel zwischen Motorik und Sensorik Bedeutung zu. Das Erkunden von Gegenständen ist ein zentrales Moment sowie die Anbahnung komplexerer Bewegungsmuster. (vgl. Terfloth & Bauersfeld 2015, 106) Hierbei hantieren Personen mit Gegenständen und ahmen Bewegungen anderer nach, im Versuch Probleme zu lösen (vgl. Jantzen 1987, 199 mit Referenz auf Petrowski).

In der *gegenständlichen Tätigkeit* wird der funktionsgerechte Einsatz von Gegenständen motivorientiert entwickelt und dient der Bedürfnisbefriedigung (vgl. Terfloth & Bauersfeld 2015, 106). Hierbei werden funktionale Eigenschaften der Gegenstände erschlossen und als konstant erkannt. Die Sprachentwicklung, das Gehen und produktives Handeln sind mit dieser Tätigkeitsform eng verwoben (vgl. Jantzen 1987, 199f.).

Die *Tätigkeit des Spiels* geht der Lerntätigkeit voraus. In Zusammenschau von Erkenntnissen nach L.S. Vygotskij und D.B. El‘konin folgert Sigrun Hinze (2010), dass die drei Hauptkomponenten des Spiels Phantasie, Nachahmung und (soziale) Regelorientierung umfassen (vgl. ebd., 278). Zugleich unterliegen auch das Spiel und seine Komponenten einer Entwicklung (vgl. Zimpel 2016b, 91ff.). Im Spiel findet eine Entwicklung statt, in der eine Annäherung an die Regel- und Systemhaftigkeit der sozialen Umwelt stattfindet und die unmittelbaren Bedürfnisse und Wahrnehmungen des Kindes in diese eingeordnet werden. Es kommt zu einer zunehmenden Auseinandersetzung mit der sozialen Lebensumwelt. (vgl. Terfloth & Bauersfeld 2015, 106)

Jantzen (1987) folgend, kommt es zu einer semantischen Aneignung der Welt (vgl. ebd., 200 mit Referenz auf Rubinstein). In Rollenspielen wird die Anschauung der Welt ausdifferenziert, in den darauffolgenden Regelspielen werden die hinter der Anschauung liegenden Gesetzmäßigkeiten betrachtet. Es entwickeln sich die Symbolfähigkeit, das klassifizierende Wahrnehmen sowie das Ausführen produktiver Tätigkeiten. (vgl. ebd.)

Lernende sollen im System Schule, also im pädagogisch-institutionalisierten Kontext, die *Lerntätigkeit* entwickeln und somit aktive Subjekte innerhalb des objekt- und somit gegenstandsgebundenen Lernprozesses sein. Hierbei gilt die Auffassung, dass Lernen und Lerntätigkeit sozial sind, die der Aneignung sozialer Werkzeuge dienen (vgl. Siebert 2010, 129). Das Motiv dieser Tätigkeitsform ist das Lernen selbst (vgl. Heinze 2010, 280). Durch die Lerntätigkeit „entwickeln sich [im frühen Schulalter, P.S] Wahrnehmung, Aufmerksamkeit, Gedächtnis, Phantasie und Denken“ (Jantzen 1987, 200) weiter. Im späteren Schulalter tritt die Bedeutung des Selbststudiums in den Vordergrund und die Moralentwicklung, das Selbstbewusstsein differenzieren sich weiter aus sowie das Nachdenken über Gegenwart und Zukunft (vgl. ebd., 200f.).

Damit die Lerntätigkeit gelingen kann, ist es „notwendig, dass das Lernmaterial in einen Lerngegenstand transformiert wird“ (Rahde 2012, 188), der ein Motiv und ein Ziel beinhaltet sowie Problemlösecharakter besitzt, der durch innere und äußere Lernmittel zu bewältigen ist (vgl. ebd., 188, 190). Als Motiv für die Aneignung der Lerntätigkeit formuliert V.V. Davydov (zit. nach Siebert 2010) das Bedürfnis zur Wissensaneignung und nach als sinnhaft erlebtem Wissen (vgl. ebd., 121). Um die Lerntätigkeit entwickeln zu können, bedarf es Lernhandlungen. „Hierzu müssen Lerngegenstand und Lernhandlungen bzw. […] Lerntätigkeit im Allgemeinen als Einheit gesehen werden und die Lernhandlung selbst zum Lerngegenstand werden, bevor sie Mittel der weiteren Lerntätigkeit wird.“ (Rahde 2012, 191) Erfolg und Misserfolg von Lernhandlungen sind von ihrer Qualität abhängig (vgl. ebd., 190). Lernstrategien werden „als das Ergebnis von Lernprozessen unter den Bedingungen unterschiedlicher Tätigkeiten und zugleich als wesentliche subjektive Bedingung einer effektiven, eigenständigen und -verantwortlichen Lerntätigkeit“ (ebd., 192 mit Referenz auf Giest & Lompscher) aufgefasst. Lehrstrategien hingegen werden als „allgemeine Entscheidungsregeln […] zur Auswahl und zum Einsatz von Lehrmethoden und -mitteln“ (ebd., 192 mit Referenz auf Lompscher) für die Lernziele gedacht.

Eng verwoben ist die Begriffsbildung durch Lerntätigkeit mit dem Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten sowie dem Verhältnis von empirischem zu theoretischem Wissen. Dies wiederum stellt Herausforderungen an den angebotenen Unterricht und konfrontiert mit der Notwendigkeit sinnhafte und bedeutungsvolle Lerngegenstände und -anlässe für die Lernenden zu schaffen. (vgl. Siebert 2010, 122f.) Auf die Unterscheidung ebendieser Relationen wird in den Fortführungen der Arbeit noch einzugehen sein.

Die *Arbeitstätigkeit* ist an das Motiv des Erstellens von Produkten gebunden. Hierbei erhalten Planung, Durchführung und Kontrolle der Arbeitshandlungen im Rahmen der Arbeitstätigkeit Bedeutung. (vgl. Terfloth & Bauersfeld 2015, 106) Dabei kommt es zu einer vermehrten Übernahme von Funktionen, die Erwachsenen zugeschrieben werden. Darüber hinaus hebt Wolfgang Jantzen (1987) hervor, dass die Beziehungsgestaltung zu Gleichaltrigen sowie Erwachsenen Bedeutung erfährt und eine Orientierung an gesellschaftlichen Normen zustande kommt, an der das eigene Verhalten bewertet wird (vgl. ebd., 201 mit Referenz auf Petrowski). Demnach ergänzt er die vorigen Ausführungen durch die Umgestaltungen des Psychischen, die durch „Freundschaften, Beziehungen zu dem anderen Geschlecht, Herausbildung einer Weltanschauung, Entwicklung von Lebensplänen und Berufswahl“ (ebd.) bedingt werden.

Häufig wird das Konzept der führenden Tätigkeiten mit dem Lebensalter verwoben dargestellt, sodass in einer Altersspanne angenommen wird, dass eine bestimmte Tätigkeit führend ist (vgl. ebd., 199ff.). Dies ist gerade in Hinblick auf inklusive Kontexte fatal und wird von den Verfassenden kritisch betrachtet. Die Betrachtung des psychologischen Alters stellt einen Versuch dar, dieses Dilemma zu umgehen, behält aber dennoch die Tendenz bei, Entwicklung und Lernen mit dem Alter in Relation zu setzen.

Da es den Verfassenden ein Anliegen ist, innere Differenzierung entlang der führenden Tätigkeiten zu denken, verzichten sie bewusst auf den Einsatz von Alterskonzepten und möchten ausschließlich die zuvor inhaltlich skizzierten führenden Tätigkeiten nutzen, um beispielsweise im Rahmen einer pädagogischen Diagnostik inklusiven Unterricht vom Subjekt aus und innerhalb der Zone der nächsten Entwicklung entwickeln zu können.

Die Reflexion der führenden Tätigkeiten von Lernenden dient der Durchdringung des Gesamtprozesses und erfordern zugleich eine reflektierende Haltung der tätigen Fachkraft bzgl. des

Menschenbildes und Entwicklungsverständnisses. Ähnliches gilt für die folgenden Darstellungen, die die tätigkeitstheoretischen Überlegungen ausdifferenzieren und somit weitere Impulse für die Reflexion von Lern- und Entwicklungsprozessen in Unterrichtsprozessen bieten.

2.1.1.3 Handlungen und Operationen innerhalb der Tätigkeit (Schwarzenberg)

Wie bereits dargestellt, ist das System der Tätigkeit eine motivgebundene Bewegung eines aktiven Subjekts auf einen Gegenstand, der ein emotionales Erfüllungsversprechen von Bedürfnissen (Zielen) zu gewährleisten scheint (vgl. Jantzen 2004, 44). Hierbei dienen Handlungen dazu „im System Subjekt-Tätigkeit-Objekt auch äußerlich" (ebd., 22) Tätigkeit zu realisieren, denn „[d]ie Tätigkeit als solche ist auf die bedürfnisrelevanten Aspekte des Gegenstandes gerichtet, kann aber nur in der Form von Handlungen existieren, welche ihr über die Inhalte den Gegenstand des Motivs geben" (Winther 2012, 261f.). Dabei sind Handlung und Tätigkeit nicht synonym zu verstehen. Eine Tätigkeit kann durch eine einzelne Handlung oder durch eine Verkettung von Handlungen realisiert werden. Da Ziel der Handlung und das Motiv der Tätigkeit bei Menschen, die über höhere psychische Funktionen verfügen, auseinanderfallen können, bedeutet dies, dass eine Handlung zur Realisierung verschiedener Formen von Tätigkeit herangezogen werden kann; durch Handlung werden (Teil-)Ziele von Tätigkeit verfolgt. (vgl. ebd., 262) Eine Handlung besitzt eine zeitliche und logische Struktur, einen Anfangs- und Endpunkt und ist die „kleinste Einheit der willensmäßig gesteuerten Tätigkeit" (Pitsch & Thümmel 2005, 36).

Carlos Köbl (2006) folgend kann dieses Schaubild in Abb. 2 modifiziert übernommen werden, das die hierarchische Ordnung von Tätigkeit, Handlung und Operation veranschaulicht. (vgl. ebd., 132f.)

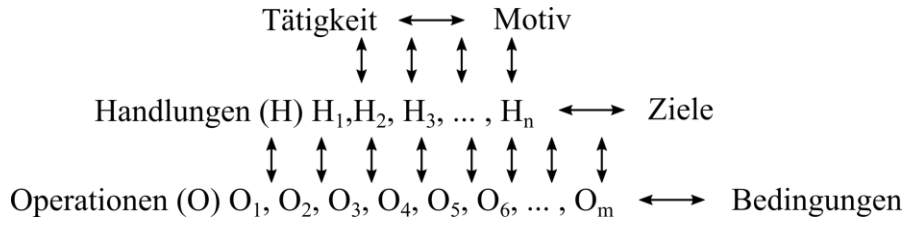

Abb. 2: Zusammenhang zwischen Tätigkeit, Handlungen und Operationen (vgl. Kölbl 2006, 133 mod. P.S.)

Tätigkeit kann durch Analyse, bspw. in Form von diagnostischen Beobachtungen, in Operationen und Handlung unterteilt werden. Operationen sind diejenigen Teile einer Handlung, die eine Person automatisiert vollziehen kann und keiner bewussten Planung bedürfen, aber durchaus

bewusst gemacht werden können oder bei Störungen wieder ins Bewusstsein in Form von Handlungen aufsteigen. (vgl. ebd.,134) Operationen sind also unselbstständige Teile einer Handlung (vgl. Pitsch & Thümmel 2005, 36). Eine Handlung hingegen wird bewusst vollzogen und weist noch keine vollständige Automatisierung auf, sodass hierbei Orientierungsgrundlagen und die Orientierungsfunktion von Tätigkeit besonders relevant sind (vgl. Winther 2012, 262). Bei der Automatisierung einer Handlung kann sie zu einer Operation werden. Operationen sind an konkrete Bedingungen in ihrer Ausführung an die Lebensumwelt geknüpft (vgl. Kölbl 2006, 132ff.).

2.1.1.4 Die Zonen der Entwicklung (Schwarzenberg)

Die von Lew S. Vygotskij konzipierten Zonen der Entwicklung, in denen sich durch Tätigkeit und somit auch in Form von Handlungen und Operationen, Entwicklung und Lernen vollziehen, sollen im Folgenden thematisiert werden,

Die *Zone der nächsten Entwicklung* stellt „ein allgemeines und dynamisches Entwicklungsprinzip des Menschen dar“ (Rahde 2012, 173), das in die kulturhistorische Schule eingebettet ist und somit Entwicklung als sozial vermittelt und kulturell und historisch determiniert auffasst. Hierbei kommen der Kooperation, dem Dialog und dem Austausch auf interindividueller Ebene Bedeutung zu. Durch die Zone der nächsten Entwicklung wird ein „Weg hin zur vollständigen Aneignung des Gegenstandes“ (Ziemen 2010, 208) gedacht. Durch die Umstrukturierung der Tätigkeit aus der interindividuellen in die intraindividuelle Ebene verändert sich ihre Form, aber nicht ihre Struktur und es kommt zu der Ausbildung von höheren psychischen Funktionen sowie zu dem Aufbau von Begriffen. Es findet also eine Verlagerung von außen nach innen statt, die als Interiorisierung bezeichnet wird (vgl. Rahde 2012, 172 mit Referenz auf Jantzen). Die Zone der nächsten Entwicklung aber kann nicht generell nur als der Bereich, in dem ein Individuum etwas noch nicht alleine, aber mit Unterstützung verrichten kann, aufgefasst werden. Vielmehr geht es im Besonderen um den Beitrag zur subjektiven Persönlichkeitsentwicklung durch das Lernangebot, sodass „die Zone der nächsten Entwicklung auf das Verhältnis von Lernen und Entwicklung zu beziehen“ (Siebert 2010, 120) ist. In der Zone der nächsten Entwicklung bahnt sich eine neue führende Tätigkeit des Subjekts an. Interessant ist, dass A.F. Zimpel (2014) das Lernen in der Zone der nächsten Entwicklung mit dem konstruktivistisch geprägten Ausdruck der Ko-Konstruktion gleichsetzt (vgl. ebd., 49).

Ausgangspunkt der Entwicklung stellt die *Zone der aktuellen Entwicklung* dar, die durch „das aktuelle Entwicklungsniveau, die aktuell verfügbaren Denk-, Handlungs-, Wahrnehmungs- und Sprachkompetenzen des Subjekts“ (Ziemen 2010, 207) gekennzeichnet ist. Die Zone der aktuellen Entwicklung stellt den Ausgangspunkt für die Bestimmung der Zone der nächsten Entwicklung innerhalb einer pädagogischen Diagnostik dar. Die Zone der aktuellen Entwicklung war in zeitlich vorausgegangen Lern- und Entwicklungsprozessen einmal die Zone der nächsten Entwicklung, in der sich eine neue führende Tätigkeit angebahnt hat (obwohl auch in derselben führenden Tätigkeit sehr viele verschiedene Zonen der nächsten Entwicklung möglich sind). Sie ist durch die Aneignung des Lerngegenstandes durch Tätigkeit zur aktuellen geworden (vgl. Ziemen 2010, 207) Es ist auch möglich diese als *Zone der vorausgegangenen Entwicklung* zu skizzieren, wie K. Ziemen (2003) dies in Bezug auf L. Vygotskij getan hat (vgl. ebd., 64). Dies macht erneut die Dynamik der Orientierung an Entwicklungszonen deutlich.

Zu beachten ist jedoch des Weiteren, dass eine Orientierung an den Entwicklungszonen nicht ausschließlich auf den schulischen Bereich zu beschränken ist, sondern dass jegliches Lernen und jegliche Entwicklung eines Menschen sich in dieser Form vollzieht und Lernen und Entwicklung in Schule also eine Variante darstellen (vgl. Rahde 2012, 171).

Die Orientierung an Zonen der Entwicklung innerhalb der Tätigkeit und unter Beachtung der führenden Tätigkeiten zeichnet sich durch eine hohe Kompetenzorientierung und Wertschätzung gegenüber jeder Person aus und ist auf zukünftiges Lernen und zukünftige Entwicklung ausgerichtet. Hierdurch wird jeglicher Defizitorientierung entgegengewirkt, da jeder Mensch sich durch Tätigkeit innerhalb der eigenen Lebenswelt und somit in der sozialen Lebensumwelt bewegt, handelt, lernt und sich entwickelt.

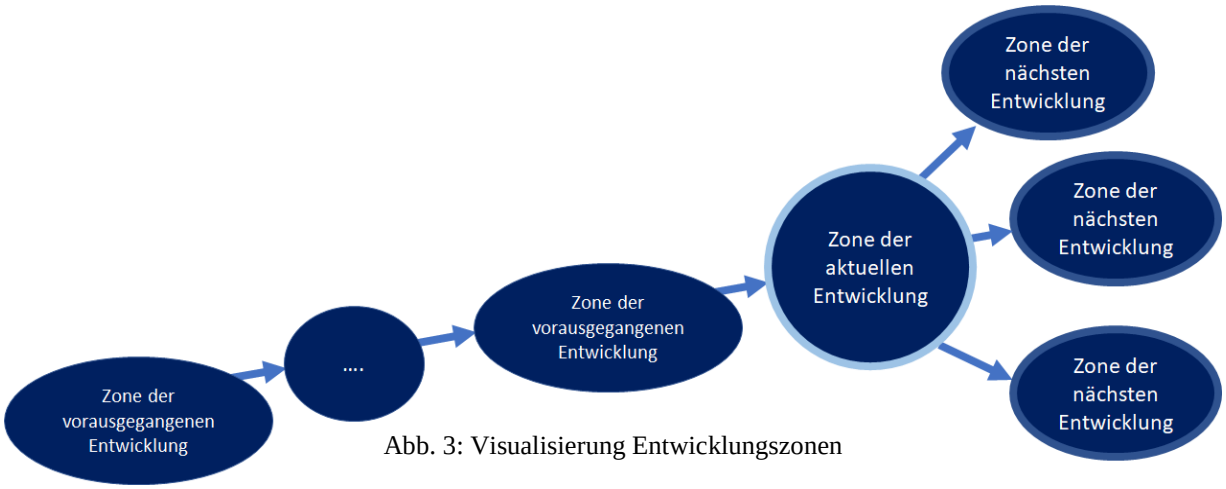

Abb. 3: Visualisierung Entwicklungszonen

Die vereinfachende Darstellung eines simulierten Entwicklungsverlaufs entlang der Zonen der Entwicklung soll dafür sensibilisieren, dass die Zone der aktuellen Entwicklung zum einen als das Resultat der vorausgegangenen Entwicklungen zu denken ist und gleichzeitig jeweils eine vollzogene Entwicklung eine Auswahl möglicher ‚Alternativen' ausgeschlossen hat. Zum anderen sollte beispielsweise im Rahmen diagnostischen Vorgehens stets bewusst sein, dass die konzipierte Zone der nächsten Entwicklung – so begründet und begründbar sie auch unter dem Gesichtspunkt der Persönlichkeitsentwicklung sein mag – eine prägende Richtung vorgibt unter dem Ausschluss von möglichen anderen Entwicklungsrichtungen, was durchaus auch Exklusionsrisiken beinhalten kann. Bei der Orientierung an den Zonen der Entwicklung ist und bleibt die Kooperation das zentrale Element in Hinblick auf die Zukunft und die Zone der nächsten Entwicklung. Dies gilt es unter dem Gesichtspunkt der Reflexion des Gesamtprozesses stets zu berücksichtigen.

2.1.1.5 Etappenweise Interiorisation und Herausbildung von Operationen und Begriffen (Schwarzenberg)

Unter etappenweiser Interiorisierung wird „[d]ie Transformation der Handlung in die geistige Ebene" (Gal'perin 2004, 18) im Rahmen von Tätigkeit verstanden, die „Umwandlung eines materiellen in einen psychischen Prozess" (ebd., 16) und somit eine Ablösung von konkreten Gegenständen hin zu Begriffen über sprachliches Handeln (vgl. Heinze 2010, 281).

Durch die Interiorisation geht eine Veränderung der Handlungen einher, sodass die tatsächlich vollzogene Handlung in Interaktion in die intraindividuelle Ebene überführt wird (vgl. Winther 2012, 247). Dies bedingt eine grundsätzlich andere Form der verinnerlichten Handlung als der materiellen, wobei die zugrundeliegende Funktion und Struktur gleich aufgebaut bleiben (vgl. Gal'perin 2004, 17f.; vgl. Winther 2012, 258).

Dieser Prozess der Interiorisation umfasst sechs Stufen der Entwicklung. Diese sind die 1. Motivation der Tätigkeit, 2. Die Orientierungsgrundlage, 3. Materielle oder materialisierte Handlungen, 4. Transformation in äußere Sprache, 5. Verkürzung der äußeren Sprache und 6. Umwandlung in das begriffliche Denken (vgl. Heinze 2010, 281 mit Bezug auf Jantzen). Wolfgang Jantzen (2004) hingegen weicht von dem skizzierten Interiorisationsprozess ab, indem zwischen die Verkürzung der äußeren Sprache und das Denken, die innere Sprache gesetzt wird (vgl. ebd.,

44). Die äußere Sprache zwischen verschiedenen Menschen entwickelt sich also über die innere Sprache zum begrifflichen Denken (vgl. Winther 2012, 247). Es gilt als wichtig, dass bei der Begriffsbildung keine Etappe der Verinnerlichung ausgelassen oder übersprungen wird, um Richtigkeit, Flexibilität und Beständigkeit der Begriffsbildungen zu ermöglichen (vgl. Heinze 2010, 284). Die Berücksichtigung des Umfangs und des Netzes eines Begriffs gilt es zu eruieren, ebenso ist seine historisch-gesellschaftliche Entwicklung von Bedeutung für die Begriffsbildung (vgl. Jantzen 2012, 20). Denn „[j]eder Begriff hat demnach seinen Empiriebereich (und hinter diesem seine Wirklichkeit), hat also eine induktive Basis, für die er angemessen ist." (ebd.) Dies hebt die Bedeutung hervor, einen gebildeten Begriff an dem empirisch Wahrnehmbaren erneut zu überprüfen, zu reflektieren und bedarfsorientiert neu auszurichten (vgl. ebd., 20f.). Das Verhältnis von empirischem und theoretischem Denken und Wissen wird an späterer Stelle betrachtet werden.

Mit anderen Worten gesprochen, bedeutet dies, dass „die höheren psychischen Funktionen des Menschen sozialer, d.h. gesellschaftlicher Natur sind. Sie sind Resultat eines Aneignungsprozesses, in dem psychische Tätigkeiten zunächst über Dialog und Kooperation interpsychisch existieren, bevor sie zu intrapsychischen Funktionen werden." (Siebert & Rodina 2013, 230) Demnach liegt die Interiorisation in der Zone der nächsten Entwicklung (vgl. ebd.; vgl. Winther 2012, 245), welche dann zur Zone der aktuellen Entwicklung wird. Durch die Interiorisation lernt das Kind innerlich zu sprechen, es beginnt in Begriffen zu denken (vgl. Heinze 2010, 279). Durch den Einsatz von Begriffen und begrifflichem Denken erschließt sich nun die Person ihre Umwelt; also durch Exteriorisation. Höhere psychische Funktionen gelten als dem Menschen eigen und sind gesellschaftlich durch den sozialen Verkehr vermittelt, niedere oder elementare psychische Funktionen sind auch anderen Lebewesen verfügbar (vgl. Jantzen 2013a, 18; vgl. Siebert 2010, 115). Peter Rödler (2017) stellt die Vermutung auf, dass menschliche Instinkte, die tierische biologische Grundausstattung, für das Überleben des Menschen nicht ausreichend entwickelt sind, sodass Kultur, entstanden in Kooperation, die Weltwahrnehmung leitet und somit das Überleben sichert (vgl. ebd., 32). Diese Annahme stellt einen zusätzlichen Grund dafür dar, den Gesamtprozess sowie das Selbst kritisch zu reflektieren.

2.1.1.6 Invariante Strukturen und die Orientierungsgrundlagen (Schwarzenberg)

Im Folgenden soll die Verzahnung von Orientierungsgrundlagen mit Invarianten herausgearbeitet werden, die für Interiorisations- und Exteriorisationsprozesse maßgeblich sind.

Pjotr Gal'perin zufolge (zit. nach Heinze 2010, 281) hat die *Orientierungsgrundlage* besondere Bedeutung für die Interiorisation neben der Ausführungs- und Kontrollhandlung. Eine Handlung wird unterteilt in einen Planungs- und Ausführungsteil, wobei der Planungsteil essentiell durch die Orientierungsgrundlage geprägt wird. Diese stellt nicht nur ein technisches Mittel dar, sondern ist „der Inhalt der Handlung, sein innerstes Wesen" (Bormann 2004, 57) und „das, was den Sinn der Sachen ändert, den Gedankengang über die Sachen." (ebd.) Durch die Orientierungsgrundalge also werden menschliche Handlungen organisiert und vernünftig. Der Lernprozess setzt P. Gal'perin folgend dementsprechend bereits beim Zusammenstellen einer Orientierungsgrundlage an und sie ist maßgebend für den Erfolg, die Verinnerlichung und die Übertragbarkeit von Lernhandlungen (vgl. Bormann 2004, 56f.). Die Ausführung, Kontrolle und Korrektur der vollzogenen Handlungen werden ebenfalls durch die zugrundeliegende Orientierungsgrundlage gesteuert, welche bedarfsorientiert modifiziert wird (vgl. Heinze 2010, 282). Auf der Ebene der Handlungsausführungen kann zwischen „den Kategorien ‚*materiell/materialisiert*', ‚*sprachlich'* und ‚*geistig*'" (ebd. mit Hervorhebungen im Original) differenziert werden. Dies stellt einen potenziellen Ausgangspunkt für Bestrebungen der pädagogischen Diagnostik sowie der inneren Differenzierung dar.

Bei Nina F. Talyzina kommt es zu einer Unterscheidung von acht verschiedenen Formen der Orientierungsgrundlagen, die als Methode für die Zusammenstellung der „Orientierungsbasis für die nachfolgende Handlung" (Gal'perin 2004 19) fungieren. Sie können entlang der Vermittlungsform, der Vollständigkeit und Übertragbarkeit der Orientierungsgrundlage, wie in Tabelle 1 aufgeführt, differenziert werden (vgl. Talyzina 2013, 226).

Typen der Orientierungsgrundlage der Tätigkeit	*Charakteristik der Orientierungsgrundlage der Tätigkeit nach der Vollständigkeit*	*Charakteristik der Orientierungsgrundlage der Tätigkeit nach dem Grad der Übertragbarkeit der Orientierung*	*Charakteristik der Orientierungsgrundlage der Tätigkeit nach der Art der Vermittlung*
Erster Typ	unvollständig	konkret	selbstständig erarbeitet
Zweiter Typ	vollständig	konkret	in fertiger Form vermittelt
Dritter Typ	vollständig	allgemein	selbstständig erarbeitet
Vierter Typ	vollständig	allgemein	in fertiger Form vermittelt
Fünfter Typ	unvollständig	allgemein	in fertiger Form vermittelt
Sechster Typ	unvollständig	allgemein	selbstständig erarbeitet
Siebter Typ	vollständig	konkret	selbstständig erarbeitet
Achter Typ	unvollständig	konkret	in fertiger Form vermittelt

Tabelle 1: Typen der Orientierungsgrundlage (Talyzina 2013, 226).

Der dritte und vierte Typ der Orientierungsgrundlage der Tätigkeit werden vertiefend vorgestellt. Der dritte Typ zeichnet sich dadurch aus, dass er eine allgemeine Analysemethode darstellt, die es erlaubt auf ihrer Basis eine Handlung zu planen, auszuführen, zu kontrollieren und zu korrigieren. Charakterisiert wird die Orientierungsgrundlage des dritten Typs durch Vollständigkeit, Rationalität sowie durch die Anwendbarkeit „für *jede* Erscheinung aus dem betreffenden Bereich“ (Gal’perin 2004, 19) und dadurch, dass Lernende sie sich selbstständig zusammenstellen können. Die Orientierungsgrundlage des vierten Typs ist dem des dritten sehr ähnlich. Die Unterscheidung liegt nicht im Maß der Allgemeinheit oder Vollständigkeit, sondern in der Form der Vermittlung. Denn die Orientierungsgrundlage des vierten Typs wird bereits in fertiger Form vermittelt. (vgl. Talyzina 2013, 226f.)

Eine *Invariante* stellt einen Aneignungsgegenstand dar, während Varianten des Unterrichtsgegenstandes Aneignungsmittel der Invarianten sind. Eine ‚In-Variante‘ ist der unveränderliche, den Gegenstand konstituierende Anteil, der alle Varianten erzeugt. (vgl. Bormann 2004, 69) Eine oder mehrere Invarianten eines Unterrichtsgegenstandes werden durch die Analyse der

verschiedenen Varianten gewonnen. Daraus wird die Invariante als Aneignungsmethode abstrahiert, wenn Lernende anhand weniger, aber gut aufbereiteter Varianten, die Invarianten möglichst schnell komplett erarbeiten und aus dieser Erarbeitung eine Methode für sich entwickeln.

Durch den Aufbau von Unterrichtslehrgängen entlang invarianter Strukturen wird eine Steigerung der Effektivität des Unterrichts, eine Verringerung des Umfangs der einzelnen Fächer und des Zeitaufwands herbeigeführt sowie das systematische Denken der Lernenden unterstützt (vgl. ebd., 71f.). Dies hat einen Effekt darauf, dass entlang einer einheitlichen und auf Invarianten beruhenden Methode Varianten von einem System erarbeitet werden, was durch die Beherrschung allgemeiner Methoden zu einer Steigerung der Ergebnisqualität und der Konstanz der erarbeiten Inhalte beiträgt sowie insgesamt die Ausbildung einer „neuer Generation von Spezialisten“ (ebd., 73) durch das Verinnerlichen allgemeiner Methoden bedingt (vgl. ebd., 71ff.). Durch die Orientierung entlang invarianter Strukturen findet gleichzeitig eine Entlastung des Unterrichts statt, sodass eine Überlastung mit Fakten zugunsten der zugrundeliegenden Strukturen und dem Einsatz von Methoden für Herangehensweisen vermieden wird (vgl. Heinze 2010, 284). Dies wird an späterer Stelle zu vertiefen sein.

Die Beforschung des funktionellen Orientierungsteils von Tätigkeit schließt auch den Ausführungsteil von Tätigkeit mit ein. Die ausgeführte Tätigkeit, basierend auf demselben Orientierungsteil, kann in verschiedenen Formen vollzogen werden und lässt sich nach „*Grad der Entfaltung“* (Talyzina 2013, 225), „*Grad der Verallgemeinerung*“ (ebd.), und dem „*Grad der Bewusstheit*“ (ebd.) beschreiben.

Die Orientierungsgrundlage der Tätigkeit stützt sich auf eine Information, die „den Inhalt der ausgeführten Tätigkeit (das Ziel, den Gegenstand, die Reihenfolge der Operationen u.a.) und […] die Bedingungen, unter denen die Tätigkeit ausgeführt wird“ (ebd.), enthält.

Es wird deutlich, dass der Erfolg einer Lerntätigkeit demnach beispielsweise auf funktioneller und struktureller Ebene von der Orientierungsgrundlage und dem Orientierungsteil der Tätigkeit abhängig ist.

2.1.2 Behinderungsgenese (Schwarzenberg)

Im Folgenden wird das Konstrukt der sog. (geistigen) Behinderung inhaltlich betrachtet. Hierzu werden Betrachtungen auf einer systemischen und personenorientierten Sichtweise des Fachdiskurses vorgestellt, weil sie mit den Menschenbildannahmen der Verfassenden in Einklang steht. Für eine personenorientierte und tendenziell defizitorientierte Betrachtung wird die ICF der Weltgesundheitsorganisation (WHO) vorgestellt. Die Auswahl der ICF ist aufgrund ihrer lebensweltlichen Relevanz im medizinischen Bereich getroffen worden und ist maßgeblich für die Gestaltung der Lebenswirklichkeit von Menschen, die unter den Bedingungen von Behinderung leben.

Diese Überlegungen werden in Kapitel 2.3 erneut aufgegriffen und mit Aspekten zur Bildung in heterogenen Gruppen im System Schule zusammengeführt, um Anforderungen und Chancen für eine pädagogische Diagnostik im Schulalltag zu erarbeiten.

2.1.2.1 Sozialorientierte Konstruktion von ‚geistiger Behinderung' (Schwarzenberg)

Geistige Behinderung „ist kein unumstößlicher Tatbestand, sondern in erster Linie eine ‚Idee' mit gravierenden gesellschaftlichen Folgen für die Betroffenen." (Feuser, Ling & Ziemen 2013, 347) Bei dem Terminus der ‚geistigen Behinderung' handelt es sich folglich um ein Konstrukt, das einen äußerst heterogenen Personenkreis zu umfassen (vgl. Stöppler 2017, 18) und zu konstruieren versucht. Der Begriff der geistigen Behinderung ist kein objektiver und inhaltlich geklärter Terminus. Vielmehr ist er „ein *soziales Zuschreibungskriterium*, weswegen es korrekt wäre, nicht von ‚geistig behinderten Menschen' zu sprechen, sondern von Personen, die als geistig behindert *bezeichnet* werden." (Theunissen 2007, 94 mit Hervorhebung im Original) Diese definitorische Abgrenzung wird durch die Überlegungen von behindert sein als objektivierter Tatbestand sowie behindert werden als sozialen Prozess erneut deutlich hervorgehoben (vgl. Ziemen 2018, 16 mit Referenz auf Dederich). Häufig wird der Behinderungsbegriff normativ verwendet und offenbart dadurch eine grundsätzliche Haltung der beobachtenden Person bzw. Personen gegenüber dem Wahrgenommenen und den daraus resultierenden Beurteilungen und Zuschreibungen (vgl. Feuser, Ling & Ziemen 2013, 345). Sog. geistige Behinderungen stellen also ein Resultat von Beobachtungs- und Zuschreibungsprozessen dar, die in sozialen Kontexten entstehen. Gegenwärtig erfolgt die Zuschreibung einer geistigen Behinderung anhand eines als negativ befundenen Vergleichs entlang von gesellschaftlich erzeugten und akzeptierten

Normen und Normalverteilungen (vgl. ebd., 346f.). Verschärft werden kann die Zuschreibung einer sog. geistigen Behinderung durch eine Attribuierung, die den Grad der Behinderung zu umfassen sucht (vgl. Ziemen 2018 mit Referenz auf Fornefeld). Dies hat Stigmatisierungen der Menschen mit sog. geistigen Behinderungen zur Folge und kann ihre gesellschaftliche Teilhabe sowie ihre Selbstbestimmung negativ beeinflussen (vgl. Stöppler 2017, 18). Die sozialen Kontexte sind durch die kulturellen, politischen und historischen Entwicklungen der Gesellschaft und weitere mehr geprägt und somit wirken diese vorausgegangenen Entwicklungen auf die „Denk-, Wahrnehmungs- und Handlungsschemata einer Vielzahl von Menschen“ (Ziemen 2003,6) ein, was die soziale Konstruktion von sog. geistiger Behinderung nach sich zieht, aber auch gleichzeitig ihre Wandelbarkeit andeutet. Hierbei wird deutlich, dass das Konstrukt der geistigen Behinderung sowohl ihre soziale Wahrnehmung innerhalb der Gesellschaft steuert als auch gleichzeitig ihre soziale Reproduktion bedingt.

In Anlehnung an die Ausführungen Birger Sieberts (2010) kann aus einer entwicklungsorientierten Pädagogik und Didaktik, die auf der kulturhistorischen Schule fußt, Bildung als Subjektentwicklung in Kooperation durch die Ausbildung höherer psychischer Funktionen aufgefasst werden – und dies schließt jeden Menschen ein. Ergänzt wird dies durch die Annahme, dass Unterricht Vermittlungsform menschlicher Entwicklung ist und nicht ausschließlich auf die Institution Schule oder auf eine Altersspanne beschränkt. (vgl. ebd.,117; 119) Ein Vorschlag, der auf L.S. Vygotskij zurückgeht und für eine neuropsychologische Entschlüsselung essentiell ist, besagt, dass „gegen eine Ausrichtung der Pädagogik auf den primären Defekt spreche, dass dieser nicht nur die geringsten Entwicklungspotenziale beinhalte, sondern auch am ehesten außerhalb der Reichweite pädagogischer Beeinflussung liege“ (Siebert 2010, 130). Stattdessen wird die Kooperation im sozialen Verkehr als Entwicklungspotenzial vorgeschlagen (vgl. ebd.; vgl. Jantzen 2012, 17). Hierbei wird eine separate Beschulung „bestenfalls [als] ein Schutz vor dem unmittelbaren Verlauf des undifferenzierten, schulischen Leistungslernens“ (Siebert 2010, 130) aufgefasst, in Verbund mit sozialer Ausgrenzung, Isolation und Stigmatisierung – was kaum Vorteile zu gewähren scheint. Durch die eingenommene Perspektive auf sog. geistige Behinderung wird ihre soziale Erzeugung und Reproduktion deutlich und dadurch diskutier- und reflektierbar.

Folgt man dieser Sichtweise, so wird das zugrundeliegende Syndrom einer Person als individuelle Entwicklungsdisposition gedacht, mit der eine Person in gesellschaftlich-soziale Prozesse eintritt und aufgrund der Disposition veränderte Lern- und Entwicklungsangebote erfährt, die als mögliche Konsequenz eine geistige Behinderung nach sich ziehen (vgl. Feuser, Ling & Ziemen 2013, 346; vgl. Jantzen 2012, 24f.; vgl. Siebert 2010, 11f.). Demnach also „ist für jedes beeinträchtige Kind prinzipiell jede Entwicklung denkbar und möglich – wenngleich sie nicht immer auch erfolgt“ (Siebert 2010, 12) und somit liegt die Unterschiedlichkeit der Entwicklung in ihren Verläufen und nicht in irgendeiner vermuteten Andersartigkeit[2] begründet.

Durch die gängige soziale Konstruktionspraxis kann festgestellt werden, dass sog. geistige Behinderung kein personengebundenes Merkmal ist, sondern das Ergebnis einer sozialen Etikettierung entlang normorientierter Abweichung von spezifischen Merkmalen (vgl. Theunissen 2007, 96). Verlangt wird ein Paradigmenwechsel in Bezug auf die Auffassung von menschlicher Entwicklung und den Konstruktionsprozessen, die sich hinter den alltäglich gebrauchten Begriffen befinden. (vgl. Manske 2010, 222). Georg Feuser (1995) konstatiert,

> Be-Hinderung ist also letztlich ein Ausdruck dessen
> - was ein Mensch mangels angemessener Möglichkeiten und Hilfen und
> - durch vorurteilsbelastete Vorenthaltung an sozialen Bezügen und Inhalten nicht lernen durfte, und
> - Ausdruck unserer Art und Weise, mit ihm umzugehen. (ebd., 132)

Christel Manske (2010) formuliert zusammenfassend: „Der Begriff ‚geistige Behinderung‘ wird erst verschwinden, wenn Ärzte und Therapeuten [und alle anderen Menschen einer Gesellschaft, P.S.] sich den Schmerz zumuten, hinter den Begriff zukommen, als Zeichen für den eigenen Defekt.“ (ebd., 222)

Allerdings trägt die ratifizierte VN-Behindertenrechtskonvention nicht dazu bei, dass der Begriff der (geistigen) Behinderung abgelöst wird; sie baut auf ihm auf (vgl. Katzenbach 201, 125). Gleiches wird im Folgenden anhand der Vorstellung des Zusammenspiels von ICF und ICD deutlich.

[2] Andersartigkeit verweist auf die Nicht-Zugehörigkeit zum Stamm der Menschen, was eine Relativierung der zuvor deutlich herausgearbeiteten allgemeinmenschlichen Eigenschaften darstellen würde und aus diesem Grund ein völlig ungeeigneter Terminus ist.

2.1.2.2 Personenorientierte Klassifikationsbestrebungen nach ICF und ICD-10-GM im Gesundheitssystem (Schwarzenberg)

Gegenwärtige Klassifikationsbestrebungen von geistiger Behinderung sind weniger dynamisch als die zuvor kurz skizzierte Sichtweise auf geistige Behinderung, obwohl die ICF der WHO versucht allgemein durch ein bio-psycho-soziales Modell Behinderung zu denken – allerdings dennoch personengebunden und nicht konsequent sozialorientiert (vgl. Katzenbach 2017, 130).

Hierbei werden die „Konzepte der Körperfunktionen und -strukturen“ (Deutsches Institut für Medizinische Dokumentation und Information (DIMDI) 2005, 4), das „Konzept der Aktivität“ (ebd.) sowie das „Konzept der Partizipation“ (ebd.) als sich wechselseitig beeinflussende Ebenen einbezogen neben der biologischen Ebene der Gesundheitsstörungen sowie der sozialen Ebenen der umwelt- und personenbezogenen Faktoren (vgl. ebd., 22). Die ICF zeichnet sich durch eine ressourcenorientiertere Sichtweise auf Behinderung aus als ihre Vorgängerin, die Internationale Klassifikation der Schädigungen, Behinderungen & Beeinträchtigungen (ICIDH) durch den Einbezug von sozialen Faktoren (vgl. ebd., 5). Eine Behinderung liegt nach ICF dann vor, wenn auf einer der Ebenen der Körperfunktionen oder -strukturen Einschränkungen vorliegen, sodass die Person in ihren Teilhabe- und Aktivitätsmöglichkeiten eingeschränkt ist (vgl. Stöppler 2017, 22). Flankiert werden kann diese Behinderung durch den Einfluss von personenbezogenen oder Umweltfaktoren, welche als Kontextfaktoren zusammengefasst werden (vgl. DIMDI 2005, 17). Insgesamt fällt auf, dass die ressourcenorientierte Sichtweise dennoch insgesamt ein negativ geprägtes Bild von Behinderung erzeugt, da Behinderung als Konsequenz aus Beeinträchtigungen aus der biologischen Ebene und der Einschränkung in Aktivität und Teilhabe gedacht wird (vgl. ebd., 5).

Ergänzt wird die ICF durch die Internationale statistische Klassifikation der Krankheiten und verwandter Gesundheitsprobleme in der zehnten Revision in deutscher Fassung (ICD-10-GM) der WHO. In dieser werden sog. Gesundheitsprobleme diagnostiziert und ätiologisch betrachtet, während die ICF über die Betrachtung von Gesundheitsproblemen hinausgeht und den Fokus auf die Partizipation und Aktivität entlang von Körperfunktionen und -strukturen richtet und somit auf die ICD-10-GM zurückgreift. (vgl. Bundesministerium für Arbeit und Soziales 2018, ohne Seitenangabe) „Die ICD-10 stellt eine ‚Diagnose‘ von Krankheiten, Gesundheitsstörungen

oder anderen Gesundheitszuständen zur Verfügung, und diese Information wird mit zusätzlichen Informationen zur Funktionsfähigkeit, welche die ICF liefert, erweitert.“ (DIMDI 2005, 10)

Die Verbindung von ICF und ICD also stellt den Versuch dar, der komplexen Lebenssituation einer Person gerecht zu werden, unter Ausblendung der tatsächlichen subjektiven Bedeutung und dem Verstehen dieser (sog. geistigen) Behinderung für die Person. Personenbezogene Faktoren werden in der ICF zwar erwähnt, aber nicht weiter ausdifferenziert einbezogen (vgl. DIMDI 2005, 14).

Eine geistige Behinderung liegt nach medizinischer Klassifikation der ICD-10-GM vor, wenn eine Intelligenzminderung als Entwicklungsstörung ermittelt werden kann (vgl. DIMDI 2017, F70-F79, ohne Seitenangabe; Jantzen 2013b, 335). Hierbei kommt es zu einer Orientierung anhand sog. IQ-Werte, die durch psychologische Tests unter Ausblendung „sog. multiple[r] Intelligenzen, kreative[r] Potenziale, Handlungskompetenzen, kommunikative[r], emotionale[r] und soziale[r] Aspekte“ (Theunissen 2007, 95) ermittelt werden und grundlegend für die Diagnose sind. Eine Besonderheit in Deutschland im internationalen Vergleich ist, dass die Lernbehinderung von einer geistigen Behinderung unterschieden wird, aber dennoch zu der Klasse der Intelligenzminderungen gefasst wird (vgl. Ratz 2009, 25; vgl. Theunissen 2007, 95). Komorbiditäten werden häufig im Kontext geistiger Behinderung festgestellt und klassifiziert (vgl. DIMDI, F70-79, ohne Seitenangabe; vgl. Fornefeld 2013, 67).

Des Weiteren ist der Diagnostic and Statistic Manual of Mental Disorders (DSM-V) der Amerikanischen psychiatrischen Gesellschaft (APA) geläufig. Dies wird aber aufgrund des beschränkten Umfangs der Arbeit nicht weiter vertieft.

Für die Ebene der Reflexion des Gesamtprozesses sowie des Selbst zeigen also die Ausführungen deutlich, dass die eigene Haltung, das Menschenbild sowie das Entwicklungsverständnis maßgebend sind für die Gestaltung schulischer Lern- und Entwicklungsangebote. Besonders deutlich wird bei den Betrachtungen der sozialen Genese von Behinderung, dass Haltungen allgemein Realitäten schaffen, die das Leben und die Entwicklung aller Menschen beeinflussen. Die Reflexion von Gesamtprozessen unter kritischer Reflexion des eigenen Selbst kann also zum Abbau von exkuldierenden Bedingungen beitragen.

Die Betrachtungen der sozial- und personenorientierten Genese sog. Behinderungen drücken bereits aus, dass mit ihnen weitreichende Folgen auf gesellschaftlicher Ebene verwoben sind. Die nächste dargestellte Ebene der MRD setzt sich mit der makrostrukturellen Reflexion von Bedingungen für das Schulsystem auseinander.

2.2 Reflexion der makrostrukturellen Aspekte (Schwarzenberg)

Die *Ebene der makrostrukturellen Aspekte* setzt auf gesellschaftlicher Ebene an und beeinflusst Schule. Exemplarisch kann dies durch „Kultur, Recht, Wirtschaft, Verwaltung, Politik“ (Ziemen 2018, 94) geschehen, aber auch ethische, philosophische oder historische Einflüsse sind denkbar. Durch die Makroebene wird die Lebenswirklichkeit maßgeblich gelenkt und gleichzeitig wirken Impulse von Menschen aus dieser Wirklichkeit auf die (Weiter-)Entwicklung der makrostrukturellen Ebene ein. Diese Ebene kann über Nationalstaaten hinaus gehen und auch europäisch oder international ausgerichtet sein. Im Kontext von Schule und Bildung werden im Folgenden vor allem rechtliche Rahmenbedingungen skizziert und herausgearbeitet. Diese sind ein wesentliches Instrument zur Steuerung von Schulbildung und greifen gleichzeitig auf kulturelle Werte und Normen zurück, werden durch politische und wirtschaftliche Fragestellungen beeinflusst und durch Verwaltungsarbeit letztlich verfasst und die Umsetzung angebahnt. (vgl. ebd., 94ff.) „Die Forderung nach Inklusion im deutschen derzeit gegliederten Schulsystem erzeugt Widersprüche bzw. Dissonanzen und erhöht den Druck auf rechtliche und politische Veränderungen.“ (Ziemen 2017a, 8)

Der Fokus der Betrachtung wird nun auf schulrechtliche Grundlagen, schwerpunktmäßig für Deutschland unter Beachtung ausgewählter internationaler Übereinkommen, das Bundesland Nordrhein-Westfalen, den Unterricht in Grundschulen und Förderschulen mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung gelegt unter besonderer Berücksichtigung des Fachs Mathematik und des Stellenwertunterrichts.

Zunächst seien jedoch einige bedeutende Charakteristika des deutschen EBUs dargestellt.

2.2.1 Mechanismen der Selbstreproduktion des Erziehungs-, Bildungs- und Unterrichtssystems (Rosemann)

Die Abkehr von Selektion und Segregation mit dem Ziel der Inklusion (Integration) ist seit vielen Jahrzehnten eine Forderung von Betroffenen und Teilen der Sonderpädagogik. Doch obschon sich die Praxis des EBUs augenscheinlich insbesondere seit der Ratifizierung der VN-BRK im Jahre 2009 hinsichtlich des Wortes *Inklusion* zu verändern scheint und obschon sich auch die Rechtslage in den meisten Bundesländern hinsichtlich sog. inklusiver Beschulung

verändert hat, erscheint die nachfolgend dargestellte Kritik Georg Feusers (1995, 164ff.) an den Mechanismen des EBUs ungeachtet ihres Alters erstaunlich zeitgemäß.

Der Kern dieser Kritik hängt mit dem Mythos sog. Behinderung zusammen. Hinter diesem steht die Vorstellung, dass die von Menschen wahrgenommene Erscheinung anderer Menschen auf personenbezogene Entstehungszusammenhänge zurückzuführen ist. Dieser führt jedoch seinerseits im Sinne einer self-fulfilling prophecy zu Isolation und der Verwehrung von Entwicklungsmöglichkeiten und somit zu Be-hinderungen. Der aus dieser Vorstellung erwachsene Mythos ‚Sonderpädagogik' bleibt Feusers Kritik entsprechend auch in integrativen (inklusiven) Settings bestehen (vgl. ebd.). Dies soll durch eine wahrhaft allgemeine Pädagogik und Didaktik aufgelöst werden, wobei im Zuge einer tatsächlichen allgemeinen Beschulung kein Be-hinderungen hervorbringendes Moment des bestehenden (oder alten, zu überwindenden) EBU beibehalten werden darf (vgl. ebd.). Diese zu überwindenden Momente sind:

- Selektion,
- Segregation,
- Atomisierung (Verständnis von Behinderung als einer inneren Eigenschaft der Anders-Artigkeit eines Menschen),
- Lerngruppenhomogenität,
- äußere Differenzierung sowie
- die Reduktion der Lernangebote (vgl. ebd.).

Auch wenn nur einige dieser Momente im Zuge einer sog. inklusiven Beschulung – etwa äußere Differenzierung und Reduktion der Bildungsangebote – erhalten bleiben, ist nach Feuser eine Reproduktion aller weiteren Momente des zu überwindenden EBUs zu erwarten (vgl. ebd., 167). Die Notwendigkeit einer diese Aspekte beachtenden Didaktik ist in diesem Kontext besonders ersichtlich, da das System Schule nur durch die Überwindung dieser Momente zu einem Potentialentfaltungssystem für alle Lernenden werden kann.

2.2.2 Inklusive Bildung in heterogenen Gruppen (Schwarzenberg)

Der Schwerpunkt der Betrachtungen wird im Folgenden auf die inklusive Idee im schulischen Bereich gelegt. Gleichzeitig stellt dies eine inhaltliche Verkürzung der Darstellung der Diskussion um Inklusion dar.

In Deutschland haben im Jahre 2016 6,99% der 523.813 Lernenden nach der statistischen Veröffentlichung der Kultusministerkonferenz sonderpädagogischen Förderbedarf, insgesamt 1,193% im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (vgl. ebd. 2018, 3f.). Von den Lernenden im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung befinden sich 11,85% in Deutschland auf einer allgemeinen Schule (vgl. ebd., XIX).

Schulbildung ist in Deutschland Ländersache und wird demnach von den 16 Bundesländern der Bundesrepublik Deutschland politisch geregelt. Die Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) pflegt es, Empfehlungen und Positionspapiere auf nationaler Ebene für alle Schulformen und einzelne Fächer herauszugeben, um beispielsweise durch die Herausgabe von Bildungsstandards die Schulabschlüsse zwischen den verschiedenen Bundesländern vergleichbar zu machen, aber auch um die sog. sonderpädagogische Förderung anhand verschiedener Förderschwerpunkte in der Bundesrepublik zu steuern. Aus diesem Grund werden auf nationaler Ebene zuerst die Empfehlungen der KMK zur sonderpädagogischen Förderung allgemein sowie im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung vorgestellt, ebenso werden die Empfehlungen zur inklusiven Bildung und die angestrebte Kompetenzorientierung durch die Implementation von Bildungsstandards kurz thematisiert. Gerahmt werden diese Ausführungen durch einen Bezug auf die Salamanca-Erklärung und die VN-Behindertenrechtskonvention auf supranationaler Ebene. Des Weiteren finden das nordrhein-westfälische Schulgesetz Einbezug sowie die Ausbildungsordnung sonderpädagogische Förderung (AO-SF), da sie die schulische Wirklichkeit in NRW maßgeblich bedingen und die Arbeit auf das Bundesland Nordrhein-Westfalen ausgerichtet ist.

Da diese Arbeit im Speziellen auf den inklusiven Mathematikunterricht in heterogenen Gruppen in der Grundschule fokussiert, wird der Lehrplan der Grundschule im Fach Mathematik vorgestellt, ebenso der rechtsgültige Lehrplan für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung unter besonderer Beachtung des fachorientierten Unterrichts zum Umgang mit Mengen, Zahlen und Größen.

Weitere Rahmenbedingungen sowie Rechtsgrundlagen, die die Lebenswelt von Menschen, die unter den Bedingungen einer Behinderung leben, stark beeinflussen, können leider nicht vertiefend betrachtet werden, auch wenn diese zweifelsohne hohe Bedeutung für gesamtgesellschaftliche sowie schulische inklusive Prozesse haben.

2.2.2.1 Nationale Rahmenbedingungen unter Beachtung supranationaler Konventionen (Schwarzenberg)

Die *Empfehlungen* der Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder (KMK) *zur sonderpädagogischen Förderung* unter Berücksichtigung der inklusiven Idee nehmen ihre Anfänge im Jahre 1994 – auch wenn diese Empfehlungen noch von Integration sprechen und Birger Siebert (2010) folgend, die separate Beschulung Lernender mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung aufgrund ihrer individuellen und speziellen Lernbedürfnisse folgend, nahelegen (vgl. ebd., 128). Ergänzt wird diese Empfehlung im Jahre 1998 durch die „Empfehlungen zum Förderschwerpunkt geistige Entwicklung“ (KMK 1998, 1).

Der Förderbegriff ist durch die KMK im Terminus der „Sonderpädagogischen Förderung“ (KMK 1994, 2) anstelle der „Sonderschulbedürftigkeit“ (ebd.) eingeführt worden und mit verschiedenen pädagogischen Haltungen und Handlungen verwoben sowie dem Hervorheben, dass eine Beschulung an allgemeinen oder zu diesem Zeitpunkt noch Sonderschulen stattfinden kann (vgl. KMK 1994, 3). Es wird als Ziel und Aufgabe der sonderpädagogischen Förderung definiert durch helfende und unterstützende Maßnahmen, „das Recht der behinderten und von Behinderung bedrohten Kinder und Jugendlichen auf eine ihren persönlichen Möglichkeiten entsprechende schulische Bildung und Erziehung zu verwirklichen.“ (ebd., 4) Hierzu wird eine Unterscheidung entlang verschiedener Förderschwerpunkte der sonderpädagogischen Förderung getroffen, die auch „die geistige Entwicklung, das Umgehen-Können mit geistiger Behinderung“ (ebd., 6) beinhaltet.

Dieser KMK-Empfehlung ist die *Salamanca-Erklärung* (1994) gefolgt, die ebenfalls das Anliegen der Integration deutlich hervorhebt, aber auch unterstellt, dass einige Lernende von einer integrativen Beschulung weniger profitieren würden als von einer separaten sowie dass andere Lernende durch die Integration dieser konstruierten Gruppe in ihrem Lernen be-hindert würden (vgl. UNSESCO 1994, 6). Innerhalb der Erklärung wird die Gestaltung der schulischen Wirklichkeit für den Personenkreis der Menschen, die unter den Bedingungen einer Behinderung leben, als Aufgabe einer „Pädagogik für besondere Bedürfnisse“ (ebd., 1) verortet. Gleichzeitig wird nach einer Reform der Pädagogik verlangt, um größtmögliche Integration durch schüler-

zentrierten Unterricht, flexiblere Systeme und unterstützende Rahmenbedingungen auf gesellschaftlicher, schulischer und personeller Ebene ermöglichen zu können unter dem Namen „eine ‚Schule für alle'" (ebd.).

Beide Dokumente haben wegweisende Funktionen innerhalb integrativer oder inklusiver Bestrebungen inne, verfolgen jedoch nicht den vollständigen Einschluss eines jedes Lernenden bzw. jeder Lernenden in das allgemeine Schulsystem konsequent. Die *Empfehlungen zum Förderschwerpunkt geistige Entwicklung* (KMK 1998, 1) ergänzen die KMK-Empfehlungen von 1994. Sie betonen zwar, dass „[b]ei der Erhebung des Förderbedarfs […] das Kind und der Jugendliche nicht unter dem Blickwinkel der Beeinträchtigung zu sehen [sind; P.S.], sondern als ganzheitlich Handelnde und Gestaltende der eigenen Entwicklung" (ebd., 9), zeichnen sich jedoch dennoch durch ein hohes Maß an Fremdbestimmung aus, scheinen den Bildungsanspruch durch Unterricht und Erziehung dem Förderungsbegriff unterzuordnen, eine separate Beschulung aufgrund sächlicher, personeller oder räumlicher Ressourcen sowie des Kostengesichtspunktes zu empfehlen. Gleichzeitig wird das Bestreben geäußert, soziale Integration und ein hohes Maß an Selbstbestimmung zu ermöglichen (vgl. ebd., 9ff.).

Die *VN-BRK (2006)* ist entwicklungsorientiert und hat wie die Salamanca-Erklärung Relevanz auf supranationaler Ebene (vgl. Bundesministerium für Arbeit und Soziales o.J., Art. 24 (2)). Die VN-BRK aber beschränkt sich nicht auf die Regelung der Beschulung und Bildung von Menschen mit Behinderungen, sondern fokussiert allgemein auf die Stärkung und Wahrung der Rechte des heterogenen Personenkreises über die gesamte Lebensspanne in allen Lebensbereichen. Sie stellt eine grundlegende Weiterentwicklung der Salamanca-Erklärung dar und geht weit über die Empfehlungen der KMK aus den Jahren 1994/1998 hinaus. Innerhalb der VN-BRK wird die Bildung nicht ausschließlich auf den schulischen Bereich beschränkt gedacht, sondern zielt auch auf die gesamte Lebensspanne ab und schließt demnach vorschulische Bildung und Bildung nach Beendigung des Schulbesuchs ein (vgl. ebd., Art. 24 (5)). Besonders deutlich werden im ersten Absatz das Bildungsrecht, das Antidiskriminierungsgebot sowie die Chancengleichheit hervorgehoben unter Achtung der Menschenwürde sowie der Entfaltung der Gesamtpersönlichkeit als Beitrag „zur wirklichen Teilhabe an einer freien Gesellschaft" (ebd.

(1)c). (vgl. ebd., (1)). Die gemeinsame, unentgeltliche, wohnortnahe Beschulung unter zur Verfügungstellung benötigter Ressourcen und Hilfsmittel von Lernenden mit und ohne Behinderung wird in Artikel 24 (2) der VN-BRK geregelt.

In Bezug auf die Ratifizierung der VN-BRK hat das Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister zwei Dokumente 2010 und 2011 publiziert, die die Anerkennung und Umsetzungsbestrebungen des mit der VN-BRK „verbundenen pädagogischen Perspektivwechsel[s]“ (KMK 2010, 3). Hierbei handelt es sich um das Positionspapier *Pädagogische und rechtliche Aspekte der Umsetzung des Übereinkommens der Vereinten Nationen vom 13. Dezember 2006 über die Rechte von Menschen mit Behinderungen (Behindertenrechtskonvention – VN-BRK) in der schulischen Bildung* (KMK 2010) sowie um den Erlass *Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in Schulen* (KMK 2011). Die beiden Dokumente stellen Ergänzungen und Weiterentwicklungsbestrebungen der „Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung“ (KMK 1994, 1) dar, die weiterhin wirksam bleiben sowie die Ausführungen in den „Empfehlungen zum Förderschwerpunkt geistige Entwicklung“ (KMK 1998, 1) (vgl. ebd. 2010, 8; vgl. ebd. 2011, 22). Hierbei wird auch hervorgehoben, dass durch das Übereinkommen der VN „eine staatliche Verpflichtung [zustande gekommen ist; P.S.], die dem Vorbehalt der progressiven Realisierung unterliegt“ (ebd., 2) und demnach als komplexe gesamtgesellschaftliche Aufgabe aufgefasst wird, die längerfristig der Realisierung bedarf und vor allem kommunal in den Ländern umzusetzen sei (vgl. ebd., 9). Durch den Beschluss der Kultusministerkonferenz 2011 wird das Positionspapier der KMK ergänzt. Die Ergänzung betrifft die zuvor dominierende Personenorientierung, indem verstärkt eine systemische Sichtweise eingenommen wird (vgl. KMK 2011, 3). Dies geschieht unter Formulierung der Zielsetzung, dass die „qualitative und quantitative Ausweitung der inklusiven Bildungsangebote […] ein Schwerpunkt sonderpädagogischen Handelns [ist, P.S.] und aller an diesem Prozess Beteiligten“ (ebd.). Dies umfasst das Schulsystem auf außerunterrichtlicher und eher institutioneller Ebene, durch die Implementation von Bildungs-, Unterstützungs- und Beratungsangeboten aus dem sonderpädagogischen Bereich innerhalb der Schulen (vgl. ebd., 13ff.). Die inklusiven Bildungsangebote der Schule hingegen tendieren eher zu einer personenorientierten Sichtweise und heben die Individualität eines Bildungsverlaufs hervor, die Notwendigkeit von offenem und differenzierendem Unterricht sowie die Möglichkeit der Anpassung von Rahmenbedingungen, um Bildung zu ermögli-

chen (durch Nachteilsausgleiche unter Vorbehalt der Vergleichbarkeit der erbrachten Leistungen oder zieldifferente Bildungsgänge) (vgl. ebd., 7ff.). Diese Sichtweise wird mit systemischen Elementen angereichert.

Insgesamt wird deutlich, dass die Zusammenarbeit zwischen den Professionen, im Pädagog*innenteam sowie mit den Lernenden und ihren Personensorgeberechtigten, exemplarisch bei Transitionen, aber auch im allgemeinen Bildungsgeschehen, intensiviert werden sollen zum Abbau von Barrieren, die Teilhabe und Selbstbestimmung negativ beeinflussen (vgl. ebd., 3).

Die *Bildungsstandards* für die verschiedenen Schulformen initiieren eine Kompetenzorientierung und stellen eine Abwendung von einer Inputorientierung im Bildungswesen zugunsten einer Orientierung auf den Output von Bildungsprozessen durch die Formulierung von operationalisierten und somit messbaren Mindeststandards als Lernziele dar (vgl. MSW 2008a, 15). Aufgrund des eingeschränkten Umfangs der Arbeit wird im Folgenden das Zusammenspiel von Bildungsstandards und der Kompetenzorientierung in der Grundschule fokussiert, die anschlussfähig an die der Sekundarstufe I formuliert sind (vgl. ebd., 8, 11). Ausschlaggebend für die Orientierung an Kompetenzen werden die Befunde aus internationalen Vergleichsstudien angeführt, die Lernenden in Deutschland Schwierigkeiten nahelegen, vernetzend zu denken, indem erworbenes Wissen und Können in neuen Zusammenhängen anzuwenden sind (vgl. ebd., 9). Der Kompetenzbegriff wird dort in Anlehnung an Franz E. Weinert als Verschränkung aus kognitiven Problemlösekompetenzen in verschiedenen Situationen gedacht, die mit motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fertigkeiten zusammenfallen (vgl. ebd. mit Referenz auf Weinert). Hieran schließt sich die Unterscheidung von fachbezogenen und fachübergreifenden Kompetenzen an, wobei letztere durch den Aufbau von „Sach-, Methoden-, und Strategiewissen“ (ebd., 11) zur Problemlösung in verschiedenen Lernzusammenhängen auszeichnen und die Wahrnehmung, Kommunikation, Analyse, Reflexion, Strukturierung, Darstellung, Transfer und Anwendung umfassen (vgl. ebd. 10f.). Diese Kompetenzen sollen dazu beitragen, Selbstständigkeit, Mitbestimmungsfähigkeit und die Eigenverantwortlichkeit zu entwickeln und Lernen wird „als aktiver, selbstgesteuerter, situativer und konstruktiver Prozess betrachtet, in dem Lernende unter Einbezug des eigenen Vorwissens anwendbares Wissen erwerben.“ (ebd., 12) Dies trägt zu mehr Gestaltungsfreiraum für Lehrpersonen bei und macht ihre Rolle als Lernbegleiter*innen (vgl. ebd., 14) notwendig anhand von ergiebigen Lernaufgaben

(vgl. ebd., 13f) mit expliziten, den Kompetenzbereichen zuzuordnenden Lernzielen. Die Anforderungen der einzelnen Kompetenzbereiche erstrecken sich vom Reproduzieren, über das Herstellen von Zusammenhängen zur Verallgemeinerung und Reflexion und werden somit in ihren Anforderungen abstrakter. (vgl. ebd., 16; vgl. MSW NRW 2004, 13)

2.2.2.2 Föderale Rahmenbedingungen in Nordrhein-Westfalen (Schwarzenberg)

In Nordrhein-Westfalen werden 2016 insgesamt 77.238 Lernende sonderpädagogisch an Förderschulen unterrichtet (vgl. KMK 2018, 25), davon 19.034 an einer Förderschule mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (vgl. ebd., 27). Eine allgemeine Schule besuchen 50.900 Lernende mit einem Förderschwerpunkt in Nordrhein-Westfalen (vgl. ebd., 53), darunter sind 2.362 mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (vgl. ebd., 56).

Auch Nordrhein-Westfalen wird beispielsweise durch die VN-BRK sowie die Empfehlungen und die Bildungsstandards der KMK schulpolitisch und -rechtlich beeinflusst. Dies findet auch im nordrhein-westfälischen Schulgesetz Niederschlag (vgl. MSW NRW 2016) sowie in der nordrhein-westfälischen „Verordnung über die sonderpädagogische Förderung, den Hausunterricht und die Schule für Kranke“ (MSW NRW 2016, 1), die beide 2016 eine rechtwirksame Änderung nach ihrem jeweiligen Erlass 2005 erfahren haben.

Das *Schulgesetz* sichert als Auftrag der Schule jedem Menschen das „Recht auf Bildung, Erziehung und individuelle Förderung“ (vgl. MSW NRW2016, 1 §1 (1)) zu und formuliert demnach einen Bildungs- und Erziehungsauftrag. Es kommt zu einer Orientierung anhand der individuellen Leistungsfähigkeit und Lernbereitschaft bei der weiteren Ausdifferenzierung des individuellen Bildungsgangs. Jedoch wird die inklusive Beschulung als reguläre Beschulungsform benannt (vgl. ebd., 1 §2 (5)). Weitere Bereiche, die durch das Schulgesetz Regelung erfahren, neben den allgemeinen Grundlagen für Schule (vgl. ebd., §§1-9), sind die Struktur und die weltanschauliche Ausrichtung von Schule (vgl. ebd., §§10-28), die Unterrichtsinhalte (vgl. ebd., §§29-33), die allgemeine Schulpflicht (§§34-41), Ausführungen zum Schulverhältnis (vgl. ebd., §§42-56), das Schulpersonal (vgl. ebd., §§57-61), die Schulverfassung sowie die Arbeit mit dem Schulministerium (vgl. ebd., §§62-77), der Schulträger (vgl. ebd., §§78-85), die Schulaufsicht (vgl. ebd., §§86-91), die Schulfinanzierung (vgl. ebd., §§92-99), die Schulen in freier Trägerschaft wie Ersatz- und Ergänzungsschulen (vgl. ebd., §§100-119) und der Datenschutz (vgl. ebd., §§123-133).

Die *AO-SF* stellt die „*Verordnung über die sonderpädagogische Förderung, den Hausunterricht und die Schule für Kranke*“ (MSW NRW 2016, 1, Hervorhebung P.S.) dar und regelt demnach die sonderpädagogische Förderung in allgemeinen Schulen, Förderschulen sowie den Hausunterricht (vgl. ebd., §§43-46) und die Schule für Kranke (vgl. ebd., §47). (vgl. ebd., §§1-48) Hierbei werden die Grundlagen der sonderpädagogischen Förderung im ersten Abschnitt geklärt (vgl. ebd., §§1-9), wozu, analog zum Schulgesetz, die inklusive Beschulung als Regelfall und separate Beschulung als Elternwahl gesetzt werden (vgl. ebd., §1), neben der Benennung der verschiedenen Förderschwerpunkte. Des Weiteren erfahren die Feststellung und jährliche Überprüfung des sonderpädagogischen Förderbedarfs sowie der Festlegung des Förderorts unter Stärkung der Elternrechte im zweiten Abschnitt Beachtung (vgl. ebd., §§10-20). Im vierten Abschnitt werden die einzelnen Förderschwerpunkte ausdifferenziert dargestellt (vgl. ebd., §§23-30), wobei der Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung als zieldifferenter Bildungsgang benannt wird, der mit einem Abschlusszeugnis die Schulbesuchszeit beendet (vgl. ebd., §30). Der sechste Abschnitt widmet sich dem zieldifferenten Bildungsgang im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Es wird in §38 entlang der sog. individuellen Bildungsmöglichkeiten ein Unterrichtsangebot, das verschiedene Entwicklungsbereiche und unterschiedliche Unterrichtsfächer umfasst, verortet, §39 regelt die Unterrichtsorganisation innerhalb der Förderschule. Hierunter fallen 28 Wochenstunden tatsächliche Unterrichtszeit und ein ausreichendes Maß an Ruhephasen und Pausen. Die Schule ist als Ganztagsschule organisiert und der Unterricht soll hauptsächlich durch fächerübergreifenden Projektunterricht realisiert werden. Die Berufsschulpflicht wird durch die Berufspraxisstufe gesichert. (vgl. ebd., §39) Das Aussetzen von Ziffernzensuren zugunsten von Verbalzeugnissen entlang der im Förderplan festgelegten Förderziele wird in §40 geregelt. In §41 wird die Versetzung ausgesetzt, sodass es der Entscheidung der Klassenkonferenz obliegt, ob ein Stufen- oder Klassenwechsel vorgenommen wird. Die jährliche Zeugnisvergabe wird geregelt unter erneuter Bekräftigung, dass die Schulbesuchszeit mit einem Abschlusszeugnis endet, indem „die erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten bescheinigt“ (ebd., §41(3)) werden (vgl. ebd., §§38-41). Im siebten Abschnitt in §42 wird die Beschulung Lernender mit Störungen aus dem Autismus-Spektrum hinsichtlich möglicher Bildungsgänge und Förderschwerpunkten in allgemeinen Schulen thematisiert. Daneben existiert der zieldifferente Bildungsgang im Förderschwerpunkt Lernen, der im fünften Abschnitt geregelt wird (vgl. ebd., §§31-37).

2.2.2.3 Rahmenbedingung für Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (Schwarzenberg)

Zu der Einführung des Förderbegriffs in den Fachdiskurs durch die KMK-Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung aus dem Jahre 1994 bleibt anzumerken, dass der Begriff der Förderung nicht eindeutig inhaltlich geklärt ist. Vielmehr ist der Förderbegriff als Ersetzung des Terminus der ‚Sonderschulbedürftigkeit' durch den des ‚sonderpädagogischen Unterstützungsbedarfs' eingeführt worden. Im Rahmen der Abkehr von einer Defizitorientierung seitens der KMK ist im Jahre 1998 versucht worden, dem Terminus ‚geistige Behinderung' die Bezeichnung ‚geistige Entwicklung' entgegenzusetzen, obwohl beide Termini nebeneinander Verwendung finden (vgl. Hinz 2013, 138). Demnach handelt es sich bei dem Förderbegriff um keinen originär pädagogischen Begriff, sondern vielmehr um einen administrativen. Verschärft wird die Problematik durch die mangelnde inhaltliche Klärung des Förderbegriffs sowie durch die Tendenz ihn synonym zum Erziehungs-, Unterrichts- und Bildungsbegriff zu verwenden. Wolfgang Lamers und Norbert Heinen (2006) sehen unter Rückgriff auf Barbara Fornefeld im Förderbegriff einen Begriff, durch den „die gestörte oder verzögerte Entwicklung behinderter Kinder thematisiert wird und damit einen Ansatzpunkt für die (pädagogische) Arbeit definiert" (ebd., 151f. mit Referenz auf Fornefeld). Gleichzeitig kann der unreflektierte Rückgriff eine Förderpraxis bedingen, die die Subjektzentrierung, Kooperation und das ausschließlich notwendige Maß an Antizipation aus der Sicht verliert, sodass eine Helfer-Pädagogik erblühen kann (vgl. Theunissen 2013, 119). Grundsätzlich „wird auf die Gefahr des fremdbestimmten Umgangs mit Behinderung hingewiesen (im Sinne von jemand wird gefördert)." (Bundschuh, Heimlich & Krawitz 2007, 78) Auch G. Feuser, K. Ling und K. Ziemen (2013) weisen auf die Gefahr hin, dass durch den Förderungsbegriff sowohl Erziehung als auch Bildung herabgestuft werden können (vgl. ebd. 349). Dabei macht Norbert Heinen (2003) deutlich, dass Menschen gattungsspezifisch lernfähig sind – unabhängig von individuellen Entwicklungsdispositionen (vgl. ebd., 127 mit Referenz auf Antor & Bleidick). „Tatsächlich aber sind *alle* Menschen, die wir als geistig behindert bezeichnen, lern-, bildungs- und entwicklungsfähig; und daher besteht eine *Schulpflicht für alle.*" (Theunissen 2007, 95)

Die medizinisch-diagnostischen Betrachtungen zeigen ebenfalls, dass eine ressourcenorientiere Sichtweise versucht wird auf das Konstrukt Behinderung einzunehmen und Kontextfaktoren

und soziale Aktivität und Teilhabe in die Betrachtungen einzuspeisen. Durch die letztendlich defizitorientierten Diagnosekriterien hingegen wird dieser ressourcenorientiertere Blick verstellt. Da innerhalb des Systems Schule häufig auch medizinische oder psychologische Statusdiagnostiken in die Planung und Gestaltung von Unterricht einbezogen werden sowie in die damit verbundenen diagnostischen Tätigkeiten, kann also ein Effekt von Statusdiagnostik auf pädagogisches Handeln angenommen werden – auch wenn dieser Effekt als geringer angenommen wird als der, der durch die pädagogische Diagnostik zustande kommt (vgl. Katzenbach 2017, 134). Ebenso wird die AO-SF, durch die die Zuweisung sonderpädagogischen Förderbedarfs in NRW geregelt wird, den Blick für das pädagogische Handeln verstellen, denn in ihr wird eine personenorientierte Sichtweise gepflegt, die der Leitidee Integration eher geprägt ist als von Inklusion.

Des Weiteren wird durch den rechtlichen Rahmen der Kompetenzbegriff in die Schulbildung einer jeden Person eingepflegt. Hierbei scheint hinter dem Kompetenzbegriff primär ein Können oder eine Fähigkeit eines Lerners zu einem festgesetzten Zeitpunkt entlang operationalisierter Variablen in Form von Kompetenzen zu stehen. Dies führt dazu, dass der Kompetenzbegriff in seiner Bedeutung verkürzt wird und die Konsequenz nach sich zieht, dass Kompetenz als individuelle Eigenschaft und nicht auch als Resultat sozialer Prozesse gedacht wird. In einer sozialorientierten Sichtweise ist der Kompetenzbegriff ein relationaler Begriff:

> ‚Kompetenz' umfasst spezifisches ‚Vermögen' bzw. einen Komplex von Fähigkeiten (Handlungsregulation, Emotionsregulation, Selbstreflexion), der nicht ausschließlich als ‚individuell' oder ‚naturgegeben', sondern bezüglich der Anforderungsstruktur an das Subjekt bzw. den sozialen Akteur betrachtet und beurteilt werden muss. (Ziemen 2010, 201f.)

Das Zu- oder Absprechen von Kompetenz also ist abhängig von Beobachtungs- und Zuschreibungsprozessen und damit von einem zugrundeliegenden normativen Rahmen (vgl. Ziemen 2018, 115). Diese Betrachtungsweise des Kompetenzkonstrukts kann zur Rekonstruktion von Kompetenz beitragen, beispielsweise in Form von Beobachtungsprozessen im Kontext diagnostischer Bestrebungen (vgl. Ziemen 2010, 202f.).

2.2.3 Inklusiver Mathematikunterricht in Nordrhein-Westfalen (Schwarzenberg)

Die folgende Auseinandersetzung umfasst die Rahmenbedingungen inklusiven Mathematikunterrichts in der Grundschule Nordrhein-Westfalens am Beispiel des Stellenwertsystems und der

Zahldarstellung. Dies geschieht unter explizitem Einbezug des förderschwerpunktspezifischen Lehrplans des Bundeslandes. Die vorausgegangenen Ausführungen stellen Rahmenbedingungen für den inklusiven Mathematikunterricht in NRW dar.

In den vorausgegangenen Unterkapiteln sind bereits die Grundlagen für den inklusiven Mathematikunterricht dargelegt worden unter expliziter Berücksichtigung von den in den Empfehlungen dokumentierten Beschlüssen der Kultusministerkonferenz. Hierbei ist die Kompetenzorientierung innerhalb der Bildungsstandards und der föderalen Lehrpläne die Reaktion auf das Abschneiden von Lernenden innerhalb der Bundesrepublik innerhalb internationaler Vergleichsstudien ausschlaggebend gewesen. Der zugrundeliegende Kompetenzbegriff der Bildungsstandards und des nordrhein-westfälischen Lehrplans für die Grundschule geht auf Franz E. Weinert zurück, der, wie bereits dargestellt, die kognitive Problemlösefähigkeit in Verschränkung mit motivationalen, volitionalen sowie sozialen Aspekten als Kompetenz hervorhebt.

Auf nationaler Ebene sind von der Kultusministerkonferenz sowohl allgemeine den Unterricht schulformspezifisch regelnde Erlasse herausgegeben worden sowie solche zur Steuerung des Outputs schulischer Bildung. Zu dieser Gruppe zählen die „*Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Primarstufe (Jahrgangsstufe 4)*“ (KMK 2004, 1; Hervorhebung P.S.). Hierin werden für das Unterrichtsfach Mathematik der Beitrag des Mathematikunterrichts zur Bildung thematisiert (vgl. ebd., 6f.) und sowohl allgemeine mathematische Kompetenzen (vgl. ebd., 7f.) als auch inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen (vgl. ebd., 8ff.) dargestellt. Nach diesen Verortungen werden Aufgabenbeispiele zu den vorgestellten Inhaltsbereichen unter Beachtung der drei Anforderungsbereiche des Reproduzierens, des Zusammenhänge Herstellens und des Verallgemeinerns und Reflektierens dargestellt (vgl. ebd., 13).

Grundlegende Annahme ist, dass Lernende bereits mit mathematischen Vorerfahrungen in die schulischen Lernprozesse eintreten und dass diese durch einen aktiv-entdeckenden Unterricht durch Verstehen in mathematische Kompetenzen umgeformt werden sollen. Dieses Verstehen mathematischer Ideen ermöglicht sowohl inner- als auch außermathematisch Verwendung und trägt zur selbstständigen Umwelterschließung bei. Gleichzeitig wird der spiralcurriculare Aufbau des gesamten Mathematikunterrichts entlang fundamentaler Leitideen konzipiert, sodass ein Weiterlernen an den Leitideen über die Schulzeit hinweg erfolgen soll. Darin wird der Beitrag zur Bildung durch den Mathematikunterricht in der Grundschule gesehen. (vgl. ebd., 6f.)

Als allgemeine mathematische Kompetenzen werden das Problemlösen, Darstellen, Argumentieren, Kommunizieren und das Modellieren hervorgehoben. Hierbei kommt es zu einer tätigen Auseinandersetzung mit Mathematik – sowohl bei Anwendung dieser Kompetenzen als auch bei ihrem Erwerb. (vgl. ebd., 7f.) Unter dem Problemlösen wird exemplarisch der Einsatz mathematisch-inhaltlicher Kompetenzen beim Umgang mit problembehafteten Aufgaben verstanden, wie z.B. beim Erarbeiten und Einsetzen einer Lösungsstrategie oder dem Nutzen und Erkennen von Zusammenhängen (vgl. ebd., 7). Die Kompetenz des Kommunizierens hingegen bezieht sich auf das Verstehen und Beschreiben von eigenen und fremden Lösungswegen unter Einsatz der Fachsprache sowie das Treffen und Einhalten von Absprachen (vgl. ebd., 8). Das Argumentieren bezieht sich auf das Erkennen von mathematischen Zusammenhängen, dem Überprüfen, Hinterfragen, Nachvollziehen und Suchen von Begründungen sowie dem Bilden von Vermutungen (vgl. ebd.). Das Darstellen zielt auf das Entwickeln, den Einsatz und die Auswahl adäquater Darstellungsformen mathematischer Probleme sowie der Übertragung der Darstellung in eine andere Form sowie dem Vergleich und der Bewertung von Darstellungen (vgl. ebd.). Das Modellieren bezieht sich auf den Umgang mit Sachproblemen. Hierbei werden Sachtexte oder Auszüge der Lebenswirklichkeit in ein mathematisches Modell umgewandelt, mit Mitteln der Mathematik bearbeitet und anschließend auf die Ausgangssituation zurückbezogen und bewertet. (vgl. ebd.)

Die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sind, wie bereits herausgearbeitet, „für den gesamten Mathematikunterricht – für die Grundschule und für das weiterführende Lernen – von fundamentaler Bedeutung“ (ebd., 8). Diese Leitideen umfassen die Inhaltsbereiche Zahlen und Operationen, Raum und Form, Muster und Strukturen, Größen und Messen sowie Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten (vgl. ebd., 8ff.).

Im Inhaltsbereich der Zahlen und Operationen werden das Verstehen von Zahldarstellungen und -beziehungen, das Verstehen und der Einsatz von Rechenoperationen und das Rechnenkönnen in Kontexten hervorgehoben und ausdifferenziert (vgl. ebd., 9). Im Inhaltsbereich von Raum und Form werden die Raumorientierung, das Erkennen, Benennen und Darstellen geometrischer Figuren sowie das Vergleichen und Messen von Flächen- und Rauminhalten als fundamental angesehen (vgl. ebd., 10). Mustern und Strukturen liegen die mathematischen Leitideen des Er-

kennens, Beschreibens und Darstellens von Gesetzmäßigkeiten sowie von funktionalen Beziehungen zugrunde (vgl. ebd., 10f.). Der Inhaltsbereich Größen und Messen beinhaltet die fundamentalen Bereiche des Erwerbs und Besitzes von Größenvorstellungen und des Umgangs mit Größen in sachrechnerischen Lernanlässen oder Sachsituationen (vgl. ebd., 11). Der Inhaltsbereich der Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten basiert grundlegend auf dem Erfassen und Darstellen von Daten sowie des Vergleichens von Ereigniswahrscheinlichkeiten aus Zufallsexperimenten (vgl. ebd.).

2.2.3.1 Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen (Schwarzenberg)

Den gemeinsam für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen herausgegebenen Lehrplänen für die Fächer Deutsch, Sachunterricht, Mathematik, Englisch, Musik, Kunst, Evangelische Religionslehre und Katholische Religionslehre sind Richtlinien vorgeschaltet, die die Funktion, Aufgaben und Ziele von Bildungsprozessen in der Grundschule erläutern (vgl. MSW NRW 2008b, 11), unter der Thematisierung von Vielfalt durch individuelle sowie sonderpädagogische Förderung und Koedukation (vgl. ebd., 12). Hinsichtlich des Umgangs mit Vielfalt werden neben Behinderung weitere Heterogenitätskategorien benannt und es wird dazu aufgefordert, Vielfalt als Herausforderung und Chance gleichzeitig anzunehmen und die Praxis entsprechend zu gestalten. „Bildung, Erziehung, individuelle Förderung und Betreuung werden als pädagogische Leitidee konzeptionell miteinander verzahnt, um Kindern mehr Bildungsqualität und Chancengleichheit zu ermöglichen.“ (ebd., 12) Unter der individuellen Förderung werden sowohl Lernende mit Lernschwierigkeiten oder -rückständen gedacht als auch solche, denen besondere Begabungen oder noch nicht genügende sprachliche Kompetenzen zugeschrieben werden. Lernende mit sonderpädagogischem Förderbedarf sollen durch die sonderpädagogische Förderung erfolgreich an der allgemeinen Grundschule, in gegenseitiger Anerkennung und unter Rücksichtnahme gemeinsam mit Lernenden ohne Förderbedarf lernen können ohne die anderen Lernen in ihrem Lernen zu be-hindern. Die Koedukation wird angestrebt durch geschlechtssensible Unterrichtsgestaltung. (vgl. ebd.) Innerhalb dieser Ausführungen dominiert, ähnlich wie in den KMK-Empfehlungen aus den Jahren 1998 und 1994, die personenorientierte Sichtweise und die Differenz- und Heterogenitätskategorie Behinderung wird von denen der sprachlichen Vielfalt oder der besonderen Begabungen durch die Zuschreibung des Bedarfs der sonderpädagogischen

anstelle der individuellen Förderung hergestellt. Eine mögliche Ursache dafür kann in der Konzeption und der Umsetzung der AO-SF gesehen werden.

Des Weiteren werden in den Richtlinien das „Lernen und Lehren in der Grundschule“ (ebd.), die Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase und nach Klasse 4 (vgl. ebd., 15), die Förderung und Bewertung von Leistungen (vgl. ebd., 16), Transitionen in die und aus der Grundschule heraus (vgl. ebd., 16f.), die Aufgaben der Lehrpersonen (vgl. ebd., 17f.), die Beiträge von Eltern (vgl. ebd., 18) sowie der Lernenden (vgl. ebd.), das Schulleben (vgl. ebd., 18f.) und die Qualitätssicherung (vgl. ebd., 19f.) behandelt.

Erst im Anschluss an diese vorgeschalteten Bemerkungen schließen sich die fachspezifischen Lehrpläne an, wobei eine Orientierung an den Beschlüssen der Kultusministerkonferenz stattfindet, sofern für das betroffene Fach ein solcher vorliegt (vgl. ebd., 13).

Demnach dienen die vorgeschalteten Richtlinien zur Erläuterung und Steuerung der Verwendung der Lehrpläne. Als zentrales Element der Richtlinien kann folgendes aufgefasst werden: „Das Lernen zu lernen und ein Leben lang lernfähig zu bleiben ist, für das Leben in der heutigen Gesellschaft von besonderer Bedeutung.“ (ebd., 14)

Dies soll der auszugsweisen Darstellung der Richtlinien an dieser Stelle genügen und es soll ein Übergang zum Unterrichtsfach Mathematik vollzogen werden.

2.2.3.2 Lehrplan für das Fach Mathematik in der Grundschule in Nordrhein-Westfalen (Schwarzenberg)

Die 2004 erlassenen Bildungsstandards für das Unterrichtsfach Mathematik haben maßgeblich Einfluss auf die nordrhein-westfälischen Lehrpläne für die Grundschule genommen. Exemplarisch äußert sich dies zum einen in der Kompetenzorientierung sowie in der Unterscheidung von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen, die im Mathematikunterricht erworben werden sollen. Die prozessbezogenen Kompetenzen des Mathematikunterrichts entsprechen den allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards und sind zum Problemlösen/Kreativ sein, Darstellen/Kommunizieren, Argumentieren und Modellieren. zusammengefasst worden, deren inhaltliche Ausgestaltung sich nicht von der der Bildungsstandards insgesamt unterscheidet. (vgl. MSW 2008b, 57; vgl. MSW 2004, 7f.) In Bezug auf die prozessbezogenen Kompetenzen werden Erwartungen für das Ende der Jahrgangsstufe 4 formuliert, und nicht bereits

nach Beendigung der Schuleingangsphase. Es wird explizit darauf hingewiesen, dass die prozessbezogenen Kompetenzen in ihrem Erwerb und Ausbau jedoch die gesamte Spanne der Grundschulzeit beachtet werden sollen. (vgl. MSW 2008b, 59f.)

Zum anderen sind die vier Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts deckungsgleich mit denjenigen, die in den Bildungsstandards für das Unterrichtsfach formuliert werden. Innerhalb des Grundschullehrplans bleibt der Bereich der Muster und Strukturen jedoch nicht erhalten, zu finden jedoch sind die Bereiche Zahlen und Operationen, Raum und Form, Größen und Messen sowie Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten. (vgl. ebd., 10f.; vgl. ebd. 2008b, 58) Die Formulierung von Kompetenzerwartungen in Bezug auf die vier fundamentalen Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts beziehen sich auf die Schuleingangsphase sowie auf die Jahrgangsstufe 4. Hierbei kommt es zu einer Ausdifferenzierung der leitenden Ideen, durch eine überprüfbare Operationalisierung der einzelnen Anforderungs- und Entwicklungsbereiche (vgl. ebd., 61ff.). Der Inhaltsbereich der Muster und Strukturen scheint in die anderen vier Inhaltsbereiche eingegliedert zu werden.

Im Folgenden soll aufgrund der Relevanz für die Arbeit ausführlicher auf das Stellenwertsystem eingegangen werden und aus diesem Grund wird der fundamentale Inhaltsbereich der „Zahlen und Operationen“ (ebd., 58) näher skizziert. Dieser Inhaltsbereich wird in die sieben Schwerpunkte der Zahlvorstellungen, Operationsvorstellungen, des schnellen Kopfrechnens, des Ziffern- und Zahlrechnens, des überschlagenden Rechnens sowie des flexiblen Rechnens untergliedert und in den Kompetenzerwartungen für die Schuleingangsphase und Jahrgangsstufe 4 ausdifferenziert. (vgl. ebd., 58; 61ff.)

Unter die *Zahlvorstellungen* fällt das Verstehen und Verwenden der Prinzipien der Bündelung und die Stellenwertschreibweise bei den Zahldarstellungen und den Untersuchungen von Zusammenhängen, Strukturen sowie bei der Orientierung im Zahlenraum und dem Vergleichen von Zahldarstellungen. Dies soll innerhalb der Schuleingangsphase im Zahlenraum bis 100 geschehen und am Ende der Klasse 4 im Zahlenraum bis 1.000.000. (vgl. ebd., 61)

Die *Operationsvorstellungen* umfassen für beide Zeiträume die zutreffende Zuordnung der vier Grundrechenarten zu Grundsituationen sowie das Nutzen von und den Wechsel „zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Operationen (mit Material, bildlich, symbolisch und

sprachlich) (ebd.) Hierbei sollen Rechengesetze und Operationseigenschaften entdeckt, verwendet und beschrieben werden. Dies soll unter dem Einsatz von Fachsprache geschehen, die am Ende der Jahrgangsstufe 4 ausdifferenzierter sein soll als nach der Schuleingangsphase. (vgl. ebd.)

Das *schnelle Kopfrechnen* orientiert sich an den zuvor genannten Zahlenräumen und erfordern die Automatisierung des kleinen Einspluseins in der Schuleingangsphase und des kleinen Einmaleins in der Jahrgangsstufe 4 und ihrer Umkehrungen. Es sollen Fähigkeiten, die zum schnellen Kopfrechnen notwendig sind in der Eingangsphase erarbeitet und bis zum Ende der Grundschulzeit auf den erweiterten Zahlenraum übertragen werden. (vgl. ebd., 62)

Beim *Zahlrechnen* geht es in der Schuleingangsphase darum, „Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen“ (ebd.) zu lösen. Das Ausnutzen von Zahlbeziehungen und Rechengesetzen für vorteilhaftes Rechnen sowie das nachvollziehbare Beschreiben des eigenen Vorgehens mündlich oder schriftlich werden angestrebt. Zum Ende der Klasse 4 sollen alle vier Grundrechenarten unter Nutzen von vorteilhaftem Rechnen beherrscht werden. Ergänzt wird das Beschreiben von Vorgehen durch das Bewerten der Vorgehensweise. (vgl. ebd.)

Das *Ziffernrechnen* hingegen wird nur mit Kompetenzerwartungen am Ende des 4. Schuljahres versehen. Hierbei geht es um das Erläutern von schriftlichen Rechenverfahren mit mehreren Schritten (mehrfache Addition oder Subtraktion), oder besonderen Herausforderungen (Multiplikation mit mehrstelligen Faktoren oder zweistellige Division durch geläufige Divisoren) entlang beispielhafter Rechenschritte in nachvollziehbarer Form. Gleichzeitig soll die Durchführung der schriftlichen Rechenverfahren beherrscht werden. (vgl. ebd.)

Durch das *überschlagende Rechnen* sollen Ergebnisse in ihrer ungefähren Größenordnung angegeben werden. Am Ende der Schuleingangsphase im Zahlenraum bis 100 und nach Klasse 4 im Zahlenraum bis 1.000.000, wobei das Runden und Schätzen höhere Bedeutung erfährt. (vgl. ebd., 63)

Das *flexible Rechnen* zeichnet sich durch die präferenz- oder aufgabengesteuerte Auswahl von Rechenstrategien beim Zahlrechnen aus. Am Ende der Jahrgangsstufe 4 werden hierbei Hilfsmittel als Rechenwerkzeuge ergänzend zu Normalverfahren zugelassen, während in der Schuleingangsphase Hilfsrechnungen, schritt- oder stellenweise Vorgehen erwünscht werden. (vgl. ebd.)

Flankiert werden alle inhaltlichen mathematischen Leitideen durch den Erwerb und Ausbau der prozessbezogenen allgemeinmathematischen Kompetenzen. Dementsprechend haben das Problemlösen/Kreativ sein, das Kommunizieren/Darstellen, das Argumentieren sowie das Modellieren innerhalb des Umgangs mit Zahlen und Operationen innerhalb des Unterrichts Berücksichtigung zu finden. (vgl. ebd., 57f.)

2.2.4 Lehrplan für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung (Schwarzenberg)

Der Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung findet bis zum jetzigen Zeitpunkt in Nordrhein-Westfalen entlang eines Lehrplans aus dem Jahre 1980 statt, der 1996 unverändert nachgedruckt worden ist (vgl. MSW NRW 2018, 47).

Die „Richtlinien und Lehrpläne für die Schule für Geistigbehinderte (Sonderschule)“ (MSW NRW 1996, 1) sind unterteilt in einen allgemeinen Teil (vgl. ebd., 7-24), in Unterrichts- und Erziehungsziele (vgl. ebd., 25-136) und in eine Zusammenfassung der Unterrichts- und Erziehungsziele (vgl. ebd., 137-142).

Im allgemeinen Teil werden Grundlagen zur Beschulung sog. geistig behinderter Menschen thematisiert (vgl. ebd., 7-11) sowie der pädagogische Auftrag der Schule formuliert (vgl. ebd., 12). Hieran anschließend werden Grundsätze pädagogischen Handelns formuliert, die den Unterricht, didaktische Überlegungen sowie die Unterrichtsplanung einschließen (vgl. ebd., 12-16). Dies bildet die Grundlage für das Formulieren der sog. fachorientierten Lehrgänge (vgl. ebd., 16-21). In deren Anschluss werden Organisationsbedingungen herausgearbeitet, die die Konzeption der Schule als Ganztagsschule mit einem geregelten Tagesablauf und Lernzielen gemäß des pädagogischen Auftrags und des Bildungsziels organisiert. Daneben werden das Einzugsgebiet, die Größe der Schule und die Nähe zu anderen Schulen thematisiert, die die schulübergreifende Zusammenarbeit begünstigen soll (vgl. ebd., 22f.). Durch Stufungen soll die Schule in Vor-, Unter-, Mittel, Ober- und Werkstufe aufgegliedert werden und in jeder Stufe

werden Schwerpunktsetzungen aus den Bereichen Orientierung, Spiel, Lernen und Arbeit gesetzt. (vgl. ebd., 23f.)

Insgesamt fällt innerhalb dieser Betrachtungen auf, dass eine defekt- und personenorientierte Sichtweise auf die Lernenden eingenommen wird. Die zugeschriebene Behinderung wird auf prä-, peri- oder postnatale biologische Ursachen zurückgeführt oder auf Deprivationserfahrungen (vgl. ebd., 8). Die hieran anschließenden erzieherischen und unterrichtsorganisatorischen Planungs- und Durchführungsaspekte fokussieren auf zugeschriebene Mängel, Abweichungen und gehen von einer beschränkten Lern- und Entwicklungsmöglichkeit aus (vgl. ebd., 7f.). Hierbei werden individuelle Möglichkeiten, falls als notwendig erachtet, den gesellschaftlichen Rahmenbedingungen untergeordnet (vgl. ebd., 7). Als positiver zu bewerten, gilt die Anerkennung der Kooperation, bspw. mit Eltern, Diensten oder anderen Professionen in Transitionsphasen – auch wenn dieser systemisch geprägte Gesichtspunkt durch die allgemeine Defizitorientierung dominiert wird (vgl. ebd., 9f.). Als Bildungs- und Erziehungsziel wird „das Recht, sich als handelnder und erlebender Mensch zu verwirklichen“ (ebd., 12), formuliert, das „zur Selbstverwirklichung in sozialer Integration“ (ebd.) führen soll. Die aufgeführten Aspekte hingegen, die dies ermöglichen sollen, zielen eher auf die Eingliederung in die bestehenden Verhältnisse ab als auf die tatsächliche Entfaltung der Persönlichkeit in Lernen und Entwicklung (vgl. ebd.).

Eine Konsequenz dieser Sichtweise ist, dass Unterrichtsfächer im traditionellen Sinne auf fachbezogene Lehrgänge heruntergebrochen werden, das Betonen der Anschauungsgebundenheit als Lernvoraussetzung, der Ausschluss von als schwer geistig behindert oder verhaltensauffällig beurteilten Personen aus aktiven Lernprozessen durch Zuweisen einer Beobachter*innenrolle (vgl. ebd., 13) sowie die Überbetonung der Relevanz des lebenspraktischen Bereichs für diesen heterogenen Personenkreis. Dies geschieht vor allem durch die Betrachtungen im zweiten und dritten Teil, die die Ausgestaltung der „Unterrichts- und Erziehungsziele“ (ebd., 25) umfassen (vgl. ebd., 25-142). Die Durchlässigkeit des Systems Sonderschule ist innerhalb des Lehrplans, wie bereits der Name des Dokumentes nahelegt, nicht vorgesehen. Eine Neuerung, die durch die KMK-Empfehlungen (1994) eingeführt worden ist, ist, wie bereits herausgestellt, die Möglichkeit der Auswahl des Förderortes bzw. die Setzung, dass die allgemeine Schule als Bildungsort angesehen wird.

Aufgrund des Alters des Lehrplans und den Entwicklungen hin zu einem inklusiven Schulsystem, das kompetenzorientierten Unterricht und somit Entwicklungen zu rahmen versucht, ist dieser Lehrplan als veraltet und weder integrativ noch inklusiv aufzufassen. Dies äußert sich unter anderem darin, dass das Unterrichtsfach Mathematik darin nicht zu finden ist, sondern verkürzt auf den fachorientierten Unterricht zum Umgang mit Mengen, Zahlen und Größen dargestellt wird (vgl. MSW 1996, 21). Weitere fachbezogene Lehrgänge sind die evangelische und katholische Religionslehre (vgl. ebd., 16ff.), Sport (vgl. ebd., 20), Musik (vgl. ebd., 20f), Lesen und Schreiben (vgl. ebd., 21) und Arbeitslehre (vgl. ebd., 21f.).

Innerhalb des Unterrichts zum „Umgang mit Mengen, Zahlen und Größen“ (ebd., 21) werden kaum entnehmbar inhaltliche Akzentsetzungen vorgenommen, vielmehr werden die Anschauungsebene und der Umgang mit dem Lerngengenstand ausschließlich auf das Ordnen, Vergleichen, Schätzen, Zählen, Messen, Wiegen und Bezahlen in Verbindung zu anderen Unterrichtslehrgängen beschränkt (vgl. ebd.). Insgesamt kommt es, wie erwähnt, zu einer defizitorientierten Personenorientierung, sodass Entwicklung und Lernen von Beginn an als eingeschränkt und nicht auf den Erwerb von inhaltlichem oder prozessorientiertem Wissen, Können und Handeln ausgerichtet anzusehen ist. Vielmehr werden dem Individuum Mängel zugeschrieben, sodass davon ausgegangen wird, dass die möglichen Bildungsinhalte außerhalb der je individuellen Erarbeitungsmöglichkeiten liegen können. Durch diesen bildungspädagogischen Reduktionismus wird ein Schwerpunkt auf den Erwerb von Fähigkeiten aus dem lebenspraktischen Bereich gelegt und das gemeinsame und inklusive Lernen grundsätzlich verunmöglicht.

2.2.5 Zentrale Erkenntnisse für die inklusive Unterrichtspraxis (Schwarzenberg)

In Zusammenschau der erarbeiten Übersicht über Teile der rechtsverbindlichen Lage zur Gestaltung der schulischen und inklusiven Bildung gibt es positiv und weniger positiv zu bewertende Entwicklungen.

Die zuvor skizzierten und veralteten, aber noch gültigen Lehrpläne für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung in Nordrhein-Westfalen sind zur Kenntnis zu nehmen ebenso wie die Tatsache, dass bis zum heutigen Zeitpunkt keine Aktualisierungsbestrebungen seitens des Ministeriums geäußert, geschweige denn realisiert worden sind.

Der Wandel, der durch die Empfehlungen der Kultusministerkonferenz entstanden ist, kann als Versuch einer Weichenstellung für integrative und im heutigen Sinne inklusive Bildung aufgefasst werden. Die initiierten Prozesse sind langwierig bis Beschlüsse erlassen werden, anschließend von den einzelnen Bundesländern rezipiert und kommunal realisiert werden – dies ist eine starke Vereinfachung und wird selbstverständlich durch viele weitere Rahmenbedingungen flankiert.

Als jedoch insgesamt positiv kann der Mathematiklehrplan der Grundschule bewertet werden, sodass vorgeschlagen wird, sich vor allem an diesem für die Gestaltung der Unterrichtspraxis zu orientieren.

Denn in diesem erfahren sowohl Fachinhalte (durch die operationalisierten Kompetenzerwartungen, die als Lernziele zu festgesetzten Zeitpunkten erworben sein sollen) als auch die Aneignung von fachübergreifenden Kompetenzen (wie das Problemlösen, Darstellen, Argumentieren und Modellieren, die als Aneignungswerkzeuge sowie analytische Mittel aufzufassen sind) Beachtung. Dies wiederum impliziert insgesamt, dass das mathematische Lernen aktiv, handelnd und entdeckend gestaltet werden muss, sodass ein ausschließlich rezeptives Lernen vermieden wird. Dementsprechend haben Lehrpersonen eher die Aufgabe als Begleiter*innen und Initiierende des Lernens (durch Unterrichtsangebote) inne und nicht als ausschließlich Wissen weitergebende Personen. Diese Ausführungen und Annahmen bieten Potenzial in Einklang mit der kulturhistorischen Schule Unterricht zu entwickeln, umzusetzen und zu reflektieren.

Wendet man nun wieder die Perspektive auf die schulische Bildung, so kann festgestellt werden, dass mit einer Quote von ungefähr 39,3% im Jahre 2016 in Deutschland Lernende mit Förderschwerpunkt inklusiv beschult worden sind (vgl. KMK 2018, XVIII). Allerdings haben reine Inklusionsquoten, wie bereits angedeutet, wenig Aussagekraft über die tatsächlich realisierten und wahrhaft allgemeinen (und damit inklusiven) Bildungsangebote. Dieses Gewähren oder Verwehren von Entwicklungschancen findet in der Praxis durch das pädagogische Personal statt. Diese dritte Reflexionsebene der MRD sei nachstehend beschrieben.

2.3 Reflexion der Rollen der Akteur*innen in der Schule und ihrer Kooperation (Schwarzenberg)

Die Ebene der *Rolle der Akteure und der Kooperationen* bezieht sich auf die verschiedenen Personen und Personengruppen, die innerhalb des Systems Schule miteinander in Kontakt treten und es durch Kooperation gestalten. Gesellschaft setzt sich aus Menschen zusammen, die innerhalb dieser aktiv sind, sie formen und aufrechterhalten sowie durch sie in ihrem Lernen und ihrer Entwicklung maßgeblich geprägt werden. Hierzu werden Rollen eingenommen und ausgeübt. Im System Schule werden die Rollen der Schulleitung, der Lehrpersonen, der Teammitarbeitenden, der Lernenden, der Eltern und Bezugspersonen als essentiell angesehen, wobei das System Schule auch weitere Personengruppen einschließt, wie beispielsweise Schulbegleiter*innen, Verwaltungsbeschäftigte, Küchen- und Reinigungspersonal (vgl. ebd., 97). Durch die dargelegten rechtlichen Aspekte wird Schule herausgefordert sich inklusiv zu verändern. Dies erfordert die Kooperation aller beteiligten Personen in der Einzelschule sowie schulübergreifend. Es kommt zu einer Abhängigkeit der Qualität der Realisierung von Kooperation und Kommunikation zwischen allen am Prozess beteiligten Personen und Personengruppen (vgl. ebd., 97f.). Die Gestaltung der zwischenmenschlichen Beziehung wird in der Denktradition der humanistischen Psychologie vorgeschlagen (vgl. ebd., 99f.). Es geht „um eine humane, wertschätzende und würdevolle Gestaltung von Beziehungen." (ebd., 103) Innerhalb der Kooperation der Lernenden im Unterricht wird der ‚Gemeinsame Gegenstand' als zentrales Element des handlungsorientierten und gemeinsamen Unterrichts hervorgehoben. Dieser wird im Zuge der Beschreibung der entwicklungslogischen Didaktik näher auszuführen sein. Flankiert wird dieses Lernen durch die zur Verfügungstellung von individueller Lernzeit, in der Lernende bedürfnis- und interessenorientiert frei lernen. Diese beiden Lernzeiten sollen einander nicht überschneiden, sondern gleichberechtigt nebeneinanderstehen (vgl. ebd., 106). Es werden Fragen nach der Unterrichtungsform einbezogen, was die Aktivität der beiden anwesenden Lehrpersonen und ihre Handlungsformen bestimmt, aber auch die Aufgaben von Teammitarbeitenden einbezieht (vgl. ebd., 105f.).

Auch der Kooperation mit den Bezugspersonen der Lernenden wird hohe Bedeutung beigemessen, da diese soziale, emotionale und kognitive Kompetenzen im Umgang mit ihrem Kind aufgebaut und entwickelt haben, die sich von professionellen unterscheiden können. Diese gilt es anzuerkennen und fruchtbar in den gesamtpädagogischen Prozess einzubeziehen, sodass ein

Bündnis auf vertrauensvoller Basis zwischen Bezugspersonen und Lehrpersonen bzw. im Klassenteam entstehen kann (vgl. ebd., 107f.).

Da kein konkretes System Schule innerhalb dieser Arbeit fokussiert wird, sollen allgemeine Ausführungen über die Kooperation mit allen an Schule beteiligten Personen hinsichtlich diagnostischer Aufgaben folgen. Die Entscheidung für die diagnostische Ausrichtung ist aufgrund des beschränkten Umfangs der Arbeit gefällt worden sowie aufgrund der Annahme, dass das System Schule lern- und entwicklungsorientiert ausgerichtet sein sollte, sodass eine pädagogische Diagnostik ausschlaggebend dafür ist, welche Lernangebote wie und von wem konzipiert, angeboten und reflektiert werden. Diese Überlegung hat die Entscheidung bedingt, dass Diagnostik als Rehistorisierung vorgestellt werden soll, welche als Ausgangspunkt für das Ableiten von Anforderungen an eine pädagogische Diagnostik darstellt. Diagnostik als Rehistorisierung ist ein kulturhistorisch kompatibles Vorgehen und wird demnach als adäquater Impulsgeber für eine pädagogische Diagnostik aufgefasst. Dies ist ein reflexiv orientierter Zugang und beinhaltet die Chance, dass nicht nur das Vorgehen im kooperierenden Pädagog*innenteam unterstützt wird, sondern auch dass das Vorgehen in Bezug auf die Lernenden reflektiert wird – was im Zusammenspiel eine Reflexion der eigenen Haltung bedingen kann und ausdrücklich seitens der Verfassenden erwünscht ist.

2.3.1 Rehistorisierung als Leitidee für pädagogische Diagnostik und die Kooperation (Schwarzenberg)

Als Konsequenz der Zusammenschau der vorausgegangenen Kapitel sowie der grundlegenden Haltung gegenüber dem Menschen, seiner Entwicklung und seinem Lernen wird aus der kulturhistorisch und materialistisch geprägten Denkschule die Rehistorisierung als entwicklungsorientierte und wertschätzende diagnostische Perspektive auf den Menschen, sein Verhalten und seine Entwicklung vorgestellt. Da eine rehistorisierende Diagnostik in ihrem Umfang sehr komplex und zeitintensiv ist, werden aus ihr begründet Anforderungen an die pädagogische Diagnostik hergeleitet, die für das Entwickeln von Lern- und Entwicklungsangeboten in der Schule von Bedeutung sind.

Im Nachfolgenden wird die Rehistorisierung als diagnostisches Instrument vorgestellt. Es soll die Syndromanalyse exemplarisch mit einer neuropsychologischen Perspektive verwoben in die

dialogisch und kooperativ ausgerichtete Rekonstruktion der Lebensgeschichte und -wirklichkeit einbezogen werden. Hierzu sei auf die Ausführungen von Aleksandr R. Lurija (1993) in „Romantische Wissenschaft. Forschungen im Grenzbezirk von Seele und Gehirn“ oder die Fallgeschichten von Oliver Sacks, wie exemplarisch „Der Mann, der seine Frau mit einem Hut verwechselte“ (2010), verwiesen. Denn innerhalb dieser Werke wird deutlich, wie das Zusammenspiel zwischen Neuropsychologie und Lebenswirklichkeit das Verstehen einer Person in ihrem Verhalten möglich oder zumindest erahnbar werden lässt und gleichzeitig erklärbarer wird, wie die Entwicklung eines Menschen zu der Person, die er oder sie nun ist, verlaufen sein kann. (vgl. Jantzen 2012, 16; vgl. Jantzen & Lanwer 2012, 6)

Es soll also nicht darum gehen empirische Verfahren aus dem diagnostischen Prozess zu verbannen, sondern es soll die Interpretation, das Verhältnis des Zusammenspiels kritisch reflektiert werden (vgl. Jantzen 2012, 13, 16). Als Ziel der Rehistorisierung kann das Bilden einer vorläufigen, verstehenden und erklärenden Hypothese gesehen werden, die den Dialog, die Kooperation in vermeintlich unveränderlichen Situation wiederaufleben und somit Entwicklung und Handeln wieder möglich werden lässt (vgl. ebd., 17). „Das Verstehen der sozialen Entwicklungssituation eines konkreten Menschen setzt beim mitfühlenden Erleben an, umgreift deren erklärende Außenperspektive und kommt im gemeinsamen solidarischen Handeln zu ihrem Ende.“ (Jödecke 2017, 166)

Die vorausgegangenen begrifflichen Klärungen zur Inklusion, Heterogenität, Differenz und Intersektionalitätsanalyse sollen in die rehistorisierende Diagnostik einbezogen werden, vor allem auf die lebensweltliche Rekonstruktion.

Insgesamt werden die Erkenntnisse zur Formulierung von leitenden Annahmen für die pädagogische und entwicklungsorientierte Diagnostik im Schulbetrieb gebündelt – denn leider sind die Anforderungen und Aufgaben, die mit einer rehistorisierenden Diagnostik verbunden sind, nicht im Schulalltag praktikabel, obwohl zweifelsohne jeder bzw. jede Lernende davon profitieren würde. Die abgeleiteten Erkenntnisse dienen als Reflexionsimpulse für das Menschenbild und die Haltung der Lehrperson bzw. des Teams gegenüber diagnostischer Tätigkeit in Verantwortung gegenüber dem bzw. der Lernenden bzw. der Lernenden und der Lerngruppe unter Berücksichtigung ihres Bildungsanspruchs und ihrer Lebenswirklichkeit.

2.3.2 Die Neuropsychologie in der Rehistorisierung (Schwarzenberg)

Gegenwärtig setzt sich „eine zunehmend dynamische, prozesshafte Sicht von geistiger Behinderung“ (Jantzen 2013b, 336 mit Referenz auf Jantzen) durch, die auch auf neuropsychologische Erkenntnisse zugreift, wobei weiterer Forschungsbedarf besteht (vgl. ebd., 337; vgl. Ziemen 2018, 20). Im ersten Moment scheint es widersprüchlich zu sein, „eine Psychologie zu schaffen, die die Bedeutung von Gehirn *und* Gesellschaft gleichermaßen berücksichtigt, ohne einer reduktionistischen Naturalisierung oder Kulturalisierung des Psychischen zuzuarbeiten.“ (Kölbl 2006, 157) Die bereits erwähnten Fallgeschichten Aleksandr Lurijas und Oliver Sacks hingegen können dieses Zusammenspiel erahn- und greifbar werden lassen (vgl. Jantzen & Lanwer 2012, 4).

Zentrale Grundhaltung der Neuropsychologie ist, dass „bei einer Schädigung in der Kindheit die am nächsten über der Schädigung liegenden funktionellen Systeme am meisten“ (Jantzen 2013b, 336 mit Referenz auf Vygotskij) beeinträchtigt werden und durch kompensatorische Mechanismen in den höheren Funktionen Ausdruck finden. Folgt man L. Vygotskij (2001), so ist die tatsächliche Entwicklung unter der Ausgangsvoraussetzung einer syndrombedingten Beeinträchtigung dahingehend zu untersuchen, welche Prozesse der psychischen Kompensation entwickelt werden und unter welchem Rückgriff auf soziale und materielle Hilfen, falls eine direkte und organische Kompensation nicht möglich ist (vgl. ebd., 113ff.; vgl. Siebert 2010, 12). „Der Begriff ‚geistige Behinderung‘ hätte folglich nur noch transitive Berechtigung (Ich werde durch einen Kern der Retardation, durch soziale Isolation in der Entwicklung meines Geistes behindert).“ (Jantzen 2013b, 336) Als unerlässlich für das Gelingen diagnostischer Prozesse ist die Zusammenarbeit innerhalb des Pädagog*innenteams und die wiederholte Reflexion der eigenen Rolle und Haltung und der damit verbundenen Verantwortung für die unterrichtliche Praxis.

2.3.3 Diagnostik als Rehistorisierung (Schwarzenberg)

Die rehistorisierende Diagnostik stellt ein diagnostisches Bestreben dar, das auf den zuvor erfolgten neuropsychologischen Grundlagen beruht und das Ziel verfolgt, eine Person in ihrem Verhalten, Handeln und Denken zu verstehen – unabhängig der Behinderung und ihres angenommenen Ausprägungsgrades – und die Entwicklung, zumindest soweit möglich, der Ontogenese erklären zu können. Dies bedarf eines hohen Maßes an Reflexivität der diagnostizierenden

Person oder Personen und setzt den Dialog und die Kooperation zwischen der diagnostizierenden Person(en) und ihrem Gegenüber voraus. (vgl. Ziemen 2003, 34) „Die rehistorisierende Diagnostik schließt die Betrachtung der unterschiedlichen Ebenen des Menschen (biologische, psychische, soziale, kulturelle bzw. gesellschaftliche Ebene) ein und fragt nach den Verhältnissen zwischen den Ebenen." (ebd., 32) Hierbei wird die sog. geistige Behinderung als Ausgansbedingung für die weitere Entwicklung gedacht, die zu einer Veränderung der sozialen Unterstützung, der Kontaktangebote sowie zur Isolation führen kann und somit „zur Herausbildung einer Reihe kompensatorischer Mechanismen, die dann für die Sache selbst gehalten werden" (Jantzen 2013b, 336), führt (vgl. Vygotskij 2001, 116). Eine rehistorisierende Diagnostik ist subjektorientiert, ganzheitlich, lebensgeschichtlich und -weltlich ausgerichtet sowie problem- und kompetenzorientiert (vgl. Ziemen 2003, 35). Durch sie wird eine verstehende Hypothese begründet aus der Lebensgeschichte, Lebenswirklichkeit und den Entwicklungsvoraussetzungen (bspw. zugrundeliegendes Syndrom) aufgestellt, die das beobachtete Verhalten zu erklären versucht. Dabei bleibt sie situations- und kontextgebunden und ist ebenfalls von den gegenwärtigen Verhältnissen sowie von der diagnostizierenden Person(en) abhängig. Eine solche Hypothese ist nicht absolut, vielmehr ist sie relational und nur das Zwischenergebnis eines Prozesses. Sie kann demnach nur vorläufig sein und muss immer wieder Verifizierungs- bzw. Falsifizierungsprozessen unterzogen werden (vgl. Jantzen & Lanwer 2012, XIV). Dieses Verstehen und Erklären bildet den Ausgangspunkt für weitere rehistorisierende Prozesse. Zentrales Element ist, nicht über die Person zu sprechen, die einer rehistorisierenden Diagnostik zukommt, sondern sie soweit möglich, in den Prozess einzubeziehen und mit der Hypothese des Verstehens und Erklärens dialogisch und kooperativ zu suchen, zu finden und zu überarbeiten (vgl. Jantzen & Lanwer 2012 Vf.). Die Hypothese oder Theorie, die sich aus einer rehistorisierenden Diagnostik ergibt, will „reflexives Schlüsselwissen für die Rekonstruktion der Lebenssituation und in den Daten sichtbaren unverständlichen Oberfläche des Anderen so zu leisten, daß Verstehen und Kommunikation mit dem Subjekt dort wieder möglich werden, wo bisher entsprechende Alternativen nicht gesehen werden konnten." (Jantzen 2012, 17) Zusammenfassend gilt zu konstatieren:

> Diagnostik als Rehistorisierung ist demzufolge theoretische und praktische Kritik an der Be- und Aussonderung. Sie ist Kritik an de Praktiken von Ausschluss und Verdinglichung und Grundlage einer Neuerzählung von Geschichte vom Standpunkt der Unterdrückten her, sie versucht denen, die nichts zu sagen haben, das Recht und die

> Möglichkeit zur Rede und zum Einwand zurückzugeben. (Jantzen & Lanwer 2012, XIV)

2.3.4 Ableitung von Anforderungen an eine pädagogische Diagnostik (Schwarzenberg)

Die pädagogische Diagnostik unterscheidet sich grundlegend von der Zuweisungs- oder Statusdiagnostik aus Psychologie und Medizin, will sie aber nicht ersetzen. Vielmehr geht es darum, das Verhältnis zwischen Status- und rehistorisierender Diagnostik reflexiv zu durchdringen – es kann sein, dass die ‚Akte' das einzig verbleibende Dokument einer Lebensgeschichte eines Menschen ist (vgl. Jantzen 2012, 11ff.). Sie wird grundsätzlich durch die Menschenbildannahmen, das Lern- und Entwicklungsverständnis und durch Zielsetzungen der diagnostisch tätigen Person für pädagogische Zwecke geprägt, umfasst bewusste und unbewusste Einstellungen und ist durch die Wechselwirkung verschiedener Systeme beeinflusst. Dies wiederum hat alles in Verbund mit dem Wissen über diagnostische Denkmodelle Einfluss auf die Auswahl der verwendeten diagnostischen Strategien sowie auf die didaktisch fundierte Umsetzung von Unterricht (vgl. Ricken & Schuck 2011, 111). Dadurch werden die Verantwortung der tätigen Lehrperson bzw. Lehrpersonen deutlich und das Erfordernis eines hohen Maßes an Reflexionsbereitschaft und -fähigkeit. „Die pädagogische Diagnostik ist Teil des Unterrichts und zielt auf verfügbare Kompetenzen, Bedürfnisse und Interessen von Schüler*innen." (Ziemen 2018, 114) Demnach befinden sich die Lehrpersonen in einem Spannungsverhältnis zwischen institutionellen Rahmenbedingungen, den Lerngegenständen, dem didaktischen und wissenschaftlichen Fachdiskurs und den Lernenden mit ihren je individuellen Lernvoraussetzungen. Pädagogische Diagnostik kann demnach nicht statisch aufgefasst werden, sondern stellt einen dynamischen Prozess dar, innerhalb dessen die subjektiven Kompetenzen und Ressourcen des Lernenden einbezogen werden und die Perspektive auf Möglichkeiten der (Lern-)Entwicklung ausgerichtet werden. (vgl. Bundschuh 2013a, 75) Hierbei erhalten „Beobachtung und Beschreibung der Lernausgangslage, die systematische Suche nach Anknüpfungsmöglichkeiten, die Entdeckung von Lernwegen sowie die Prüfung" (Bundschuh 2013b, 116) der aus der pädagogischen Diagnostik abgeleiteten und umgesetzten Unterrichtsangebote an Bedeutung. S. Heinze (2010) fordert von einer pädagogischen Diagnostik, die die geistige Entwicklung eines Lernenden unterstützen will, die Identifikation der Zonen der aktuellen und nächsten Entwicklung (vgl. ebd., 280). Dies bedeutet die Zone der aktuellen Entwicklung zu erfassen, die die „momentan verfüg-

baren Denk-, Wahrnehmungs-, Sprach- und Handlungskompetenzen“ (Ziemen 2018, 114f.) umfasst, um daraus unter Bezug auf den Unterrichtsgegenstand Möglichkeiten der Entwicklung in der Zone der nächsten Entwicklung zu identifizieren (vgl. ebd., 115).

> Diagnostisch tätige Lehrkräfte sind in institutionelle Verwertungszusammenhänge eingebunden und zugleich aber dem Fachdiskurs und der ethischen Verpflichtung unterworfen, über die institutionellen Gepflogenheiten hinweg auf dem jeweils aktuellen Stand des Wissens jene förderlichen Bedingungen zu schaffen, die von den sich entwickelnden und lernenden Subjekten zur Gestaltung der eigenen, emanzipativen und selbstverantwortlichen Partizipation an den gesellschaftlichen Austauschprozessen aufgegriffen werden können. (Ricken & Schuck 2011, 110)

Dies steht im Einklang mit den Ausführungen der KMK (1994, 9), dass die Diagnostik sich „von den übergeordneten Prinzipien Entwicklungsnähe, Ganzheitlichkeit, Kommunikations- und Handlungsorientierung leiten“ (ebd.) lassen solle. Die Orientierung an Kompetenzen hingegen birgt auch für die pädagogische Diagnostik die Gefahr normorientierte oder interindividuelle Vergleiche durchzuführen und dadurch den Blick auf Kompetenzen einer Person zu verstellen. Diese Erkenntnis wird nicht nur mit dem Erfordernis von Reflexivität der beobachtenden Person bzw. Personengruppen verwoben, sondern auch gleichzeitig die intraindividuelle Entwicklung als Bezugsnorm für das Anerkennen von Kompetenz zu nutzen. Es geht um Subjektorientierung, wobei Kompetenz Ausdruck und Ergebnis von didaktischen Prozessen und Anerkennung ist. (vgl. Ziemen 2018, 115f.)

Bezieht man nun die Perspektiven aus dem Intersektionalitätsansatz, Heterogenität und Differenz im Kontext von Inklusion mit in die pädagogische Diagnostik ein und ebenso die Möglichkeiten und Chancen, die sich durch eine rehistorisierende Perspektive ergeben, so kann das Verhältnis von Individuum und seiner Lebenswirklichkeit auf verschiedene Weisen betrachtet und analysiert werden. Auch wenn diese Perspektiven grundsätzlich Ähnlichkeiten aufweisen, so unterscheiden sie sich doch deutlich durch Akzentsetzungen. Die rehistorisierende Diagnostik bezieht stark die individuellen Entwicklungsdispositionen ein, exemplarisch durch eine neuropsychologische Perspektive, mit denen eine Person in kulturell und gesellschaftliche Lern- und Entwicklungsprozesse durch Kooperation und Interaktion teilhat und teilnimmt. Es wird als zentrales Element gesehen, das Individuum in den diagnostischen Prozess soweit möglich einzubeziehen und seine bzw. ihre Haltung anzuerkennen und wertzuschätzen. Dies hebt auch Kerstin Ziemen (2018) als zentrale Aufgabe pädagogischer Diagnostik hervor (vgl. ebd. 118).

Heterogenität und Differenz entstehen im komplexen gesellschaftlichen Verkehr durch Beobachtungen, Bewertungen und letztlich Zuschreibungen. Dies wird in der Auseinandersetzung mit Inklusion besonders deutlich. Hierbei wird das Ressourcen-Etikettierungs-Dilemma hervorgehoben, in gleichzeitiger Forderung dies zu überwinden. Gerade dieses Dilemma kann im Kontext von pädagogischer Diagnostik Beobachtungs- und Zuschreibungsprozesse beeinflussen, wenn durch die Zuweisung von Förderbedarf ein positiver Einfluss auf zukünftige Ressourcenzuweisungen erhofft wird. (vgl. Katzenbach 2017, 132f.)

Die Intersektionalitätsanalyse versucht die Bedeutung verschiedener Ungleichheitskategorien im Leben von Personen oder Personengruppen herauszustellen, um daraus Marginalisierung- und Diskriminierungsprozesse aufzudecken und diese gleichzeitig abbauen zu können. Hier scheint das Empowerment eine zentrale Kategorie zu sein, aber ebenso die Stellvertretung. Verbunden mit der Identifikation von Ungleichheitskategorien werden gesellschaftliche Bewusstmachungs- und Umstrukturierungsprozesse angestrebt. Gerade im Kontext von sog. geistiger Behinderung oder psychischen Erkrankungen und einem gesamtgesellschaftlichen Ausschluss und Einschluss in eine geschlossene Institution kann die Perspektive der Intersektionalität innerhalb der Rehistorisierung oder der pädagogischen Diagnostik bereichernd sein. (vgl. Jantzen & Lanwer 2012)

Zusammenfassend ergibt sich also für die pädagogische Diagnostik eine äußerst komplexe und vielschichte Aufgabe, die nur kooperativ innerhalb des Pädagog*innenteams bewältigt werden kann, um Lernen und Entwicklung zu unterstützen. Gleichzeitig ist es unentbehrlich hierbei die eigene Rolle und ihre Umsetzung zu reflektieren, zum Beispiel innerhalb des diagnostischen Prozesses dem Lernenden bzw. der Lernenden gegenüber. Die Frage nach der Vermittlung kann durch diese diagnostische reflexive sowie kompetenzorientierte Perspektive profitieren, da hilfreiche Impulse für Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht gegeben werden. Dies soll im folgenden Kapitel geschehen.

Dieses Unterkapitel schließt nun mit der Bemerkung, dass die Haltung, Reflexivität und Kooperationsbereitschaft von Pädagog*innen zentral, wenn nicht sogar ausschlaggebend sind, um Lernen, Entwicklung, Bildung und Selbstverwirklichung als Lernbegleiter*innen zu unterstützen.

2.4 Reflexion des Verhältnisses zwischen Lernenden und Lerngegenstand (Schwarzenberg)

Auf der *Dimension des Verhältnisses zwischen Lerngegenstand/Sache und den Lernenden* geht es um die Überwindung des Dualismus von der Seite der Lernenden und der Seite der Sache, indem auf das Vermittlungsverhältnis fokussiert wird. Dies geschieht unter Berücksichtigung der Lernenden in ihren Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen und der invarianten Strukturen des Lerngegenstandes bzw. der Sache. (vgl. Ziemen 2018, 110ff.) Diese Ausführungen werden in der tätigkeitstheoretischen Betrachtung und in der entwicklungslogischen Didaktik hohe Bedeutung zugemessen. Ähnlich wie in der Tätigkeitstheorie der kulturhistorischen Schule wird der Blick auf das gerichtet, was zwischen Subjekt und Objekt sowie Subjekt und Subjekt vermittelt, nämlich die Tätigkeit. Dieses Verhältnis wird auch im didaktischen Kontext zu betrachten sein und ist handlungsleitend. Aus diesem Grunde erfolgt nun eine breite Ausdifferenzierung dieser Betrachtung, da sie gerade auch für das Entwickeln eines inklusiven Unterrichts zur Zahldarstellung hohe Relevanz hat. Hierbei wird es auch zu einem Rückgriff auf die Unterscheidung des Fundamentalen, Elementaren sowie des Exemplarischen nach W. Klafki kommen, da diese auch Einfluss auf die entwicklungslogische Didaktik ausüben. (vgl. ebd.; vgl. Ziemen 2017, 7f.)

Gleichzeitig ist die pädagogische Diagnostik ein zentrales Element zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen Lernenden und Lerngegenstand. Hierbei wird die Relevanz der Anerkennung von und Sensibilität für subjektive Kompetenzen hervorgehoben. Dies ist im vorausgegangen Kapitel zur pädagogischen Diagnostik bereits behandelt worden (vgl. Ziemen 2018., 114ff.).

Die folgenden Darstellungen sind von Bedeutung, wenn Überlegungen angestellt werden, wie alle Lernenden von der Schuleingangsphase bis zum Schulabschluss gemeinsam lernen sollen. Durch die operationalisierbaren Kompetenzerwartungen und der Outputsteuerung durch die Bildungsstandards oder die Sonderlehrpläne für zieldifferente Bildungsgänge werden diese inklusiven Prozesse mit massiven Barrieren be-hindert. (vgl. ebd., 122f.)

Diese Dimension fokussiert auf die *didaktischen Gestaltungsmöglichkeiten von Unterricht*. Sie baut grundsätzlich auf den Möglichkeiten der inneren Differenzierung auf und ist dementsprechend eng verwoben mit der Frage nach dem Verhältnis zwischen Lernenden und Lerngenge-

stand (vgl. ebd., 124-173). Innere Differenzierung kann entlang verschiedener Ebenen der Aneignung durchgeführt werden, wie im mathematikdidaktischen Teil der Arbeit skizziert werden wird (vgl. ebd., 124f.). Ebenso aber ist sie entlang der führenden Tätigkeiten aus der kulturhistorischen Schule möglich und ergiebig. Verwoben mit dem Konzept der führenden Tätigkeiten ist auch die etappenweise Interiorisation geistiger Handlungen und die Ausbildung von Begriffen innerhalb der Lerntätigkeit, welche derselben Denkschule entstammt. Im Folgenden sollen diese beiden Bereiche ausführlich dargelegt werden. (vgl. ebd., 125- 137)

Durch die Reflexion dieser Ebene sollen didaktische Vorannahmen bewusst werden, die in die Planung und Gestaltung von Unterricht eingeflossen sind. Dies umfasst sowohl didaktische Konzepte als auch Methoden. Hierbei sollten Rückbezüge zum zugrundeliegenden Menschenbild der Konzepte und Methoden sowie der eigenen Haltung initiiert werden. Dies führt insgesamt zu einer Erweiterung der eigenen Handlungskompetenzen. (vgl. Ziemen 2017a, 6f.)

Im Folgenden wird die entwicklungslogische Didaktik skizziert, ihre didaktischen Desiderata behandelt und nach der Klärung des Bildungsgehaltes der Zahl und ihrer Darstellungen eine phylogenetische Betrachtung der Zahl folgen.

2.4.1 Entwicklungslogische Didaktik (Rosemann & Schwarzenberg)

Die entwicklungslogische Didaktik von Georg Feuser (1995) stellt eine Didaktik im Sinne einer Allgemeinen Pädagogik dar, die keinen Lernenden ausschließt (vgl. ebd., 170f.). Sie fußt auf einem Verständnis des Menschen als integrierte bio-psycho-soziale Einheit und auf den reformpädagogischen Prinzipien der Demokratisierung (da alle alles lernen dürfen) und der Humanisierung (da allen die ihnen adäquaten Hilfen und Ressourcen zugestanden werden) (vgl. ebd., 172f.). Um dies gewährleisten zu können, werden die Prinzipien der *Kooperation*, der *inneren Differenzierung*, der *Individualisierung* und des Lernens aller in größtmöglicher Heterogenität an einem *gemeinsamen Gegenstand* verwirklicht (vgl. ebd.). Die Didaktik soll also einen Beitrag zur Überwindung von Stigmatisierung, Marginalisierung und Diskriminierung leisten – unter der Voraussetzung einer positiven Haltung gegenüber dem Prozess der Inklusion (vgl. Ziemen 2018, 110).

Die entwicklungslogische Didaktik greift unter anderem auf Erkenntnisse aus der kritisch-konstruktiven Didaktik Wolfgang Klafkis und der kulturhistorischen Schule zu, wie der etappenweisen Interiorisation geistiger Handlungen und der Tätigkeitstheorie (vgl. Ziemen 2018, 112). Elemente aus der kulturhistorischen Schule/Tätigkeitstheorie sind die Orientierung an der Zone der nächsten Entwicklung, den dominierenden Tätigkeiten und die Berücksichtigung verschiedener Ebenen der Abstraktion (vgl. ebd.).

Feuser (1995) stellt insgesamt heraus:

> Als integrativ bezeichne ich eine Allgemeine (kindzentrierte und basale) Pädagogik, in der *alle* Kinder und Schüler in Kooperation miteinander, auf ihrem jeweiligen Entwicklungsniveau, nach Maßgabe ihrer momentanen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungskompetenzen, in Orientierung auf die ‚nächste Zone ihrer Entwicklung', an und mit einem ‚gemeinsamen Gegenstand' spielen, lernen und arbeiten (168, Hervorhebung im Original).

Feuser versteht dabei Individualisierung nicht als eine personenbezogene Reduktion der Bildungsinhalte, sondern als Orientierung an den allgemeinmenschlichen Entwicklungstendenzen unter Berücksichtigung des gemeinsamen Gegenstands als Kerngehalt dessen, was eine Erscheinung auf dem höchsten menschlichen Erkenntnisniveau ausmacht (vgl. ebd., 157; 172). Der gemeinsame Gegenstand ist also entsprechend der individuellen Entwicklung erfahrbar zu machen, womit eine unzulässige Reduktion und damit ein Verwehren höherer Niveaus ausgeschlossen werden soll (vgl. ebd., 172). Der gemeinsame Gegenstand ist also

> der zentrale Prozeß, der hinter den Dingen und beobachtbaren Erscheinungen steht und diese hervorbringt […] – objektseitig – das innere Wesen der äußeren Erscheinung einer Realität (ebd., 181).

Es handelt sich also „um einen feststehenden synthetischen und symbolhaften Begriff und nicht um die Attribuierung von ‚Gegenstand' durch das Wort ‚gemeinsam'" (Feuser 2013, 285). Es werden darunter also nicht physisch fassbare Gegenstände verstanden, sondern vielmehr die hinter dem Lerngegenstand stehenden zentralen Prozesse, die den Gegenstand in seinem Sein bedingen (vgl. Ziemen 2018, 114). Somit ist der gemeinsame Gegenstand abstrakter Natur und wird erst für die Hand der Schülerinnen und Schüler in Form eines Lerngegenstands konkret.

Die Kooperation am gemeinsamen Gegenstand stellt nach Georg Feuser ein grundlegendes Element der Realisierung der entwicklungslogischen Didaktik dar. Hierbei befassen sich

> Menschen unterschiedlichster Biografie, Lernausgangslagen und Entwicklungsniveaus in Kooperation miteinander arbeitsteilig und zieldifferent mit verschiedenen *erlebens- und erkenntnisrelevanten Dimensionen einer zu bearbeitenden Wirklichkeit* (Feuser 2013, 282, Hervorhebung im Original).

Der gemeinsame Gegenstand kann über alle führenden Tätigkeiten zugänglich und somit über verschiedene Handlungen erschlossen werden und birgt dadurch die Möglichkeit, jeder und jedem jeden Lerngegenstand erfahr- und lernbar werden zu lassen (vgl. ebd., 285).

Als Schüler Klafkis nutzt Feuser die Begriffe des Fundamentalen und Elementaren sowie des Exemplarischen (vgl. Siebert 2010, 108).

Allerdings kritisiert er Klafkis starke Orientierung an der Sachstruktur und setzt der Sachstrukturanalyse die Tätigkeitsstrukturanalyse der Subjektseite äquivalent entgegen – schließlich entsteht die Sache nur durch Tätigkeit, existiert sie nur im Menschen (vgl. Feuser 1995, 176f.). Dabei sind führende Tätigkeiten und die Zonen der Entwicklung (Vygotskij) zu berücksichtigen (vgl. ebd.).

Zugleich eröffnet er die dritte Dimension der Handlungsstrukturanalyse, die durch die Etappen der Interiorisation (Gal'perin) vollzogen wird (vgl. ebd.).

Somit ist die als allgemeine Didaktik konzipierte entwicklungslogische Didaktik Feusers eine Didaktik, die durch das Verhältnis „‚Subjekt ↔ Tätigkeit ↔ Objekt' eine dreidimensionale Didaktik" (ebd., 178) ist, die das kulturhistorisch bestimmte Wesen der Begegnung von Mensch und Welt aufzunehmen versucht.

2.4.2 Didaktische Desiderata (Rosemann)

Obschon die entwicklungslogische Didaktik als einer Grundlage der MRD auf einem beachtenswerten theoretischen Fundament aufbaut (vgl. Feuser 1995, 1ff.), sind dennoch einige Desiderata insbesondere hinsichtlich der Erkenntnisse der kulturhistorischen Schule/Tätigkeitstheorie zu benennen. Wolfgang Jantzen (2004, 37ff.) nennt bezüglich der Objektseite insbesondere die Strategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten, die tätigkeitstheoretischen Arbeiten Talyzinas sowie die Arbeit mit Keimzellen.

In den folgenden Kapiteln werden daher diese Erkenntnisse dargestellt.

2.4.3 Zum Verhältnis des Abstrakten und Konkreten (Rosemann)

Der Aufbau wissenschaftlicher Begriffe, die im Gegensatz zu alltäglichen Begriffen Mittel zur Ausbildung theoretischen abstrakten Denkens sind, muss nach Vygotskij ein vorrangiges Ziel des Schulunterrichts sein (vgl. Bielefeld 2012, 63). Denn das Verfügen über Begriffe eines Wissensgebietes und insbesondere über die Relationen dieser Begriffe ist die Grundlage, um das Wesen von Ausschnitten der Umwelt erarbeiten und erkennen zu können (vgl. ebd., 64). So verstanden sind Begriffe Synonyme für das Abstrakte (vgl. Dawydow[3] 1972, 242). Dabei ist häufig gerade diese Herausforderung, aus der mannigfaltigen Welt mit all ihren Erscheinungen, die in höchst ungeordneter Vielfalt auftreten, das Bedeutsame, das Wesen Konstituierende zu erkennen, für viele Schülerinnen und Schüler und ihre Lehrkräfte groß (vgl. Rahde 2012, 195).

In Tradition der kulturhistorischen Schule sind beachtenswerte – im aktuellen didaktischen Diskurs aber dennoch wenig beachtete – Vorschläge entstanden, um die angesprochene Problematik aufzulösen. Bevor auf einige dieser Überlegungen eingegangen werden kann, sei jedoch zunächst auf das Verständnis und das Verhältnis vom Abstrakten und Konkreten, von theoretischem und empirischem Denken eingegangen.

Dem Alltagsverständnis entsprechend wird Konkretes oft als Einfaches, als unmittelbar sinnlich Zugängliches aufgefasst, wohingegen Abstraktes oft als schwer Verständliches und schwer Zugängliches verstanden wird – eine Vorstellung des Begriffspaars, die sich auch in der Bezeichnung der ‚praktischen Bildbarkeit' und oft in der Gestaltung des Unterrichts an sog. Förderschulen widerspiegelt. Mit dem *Konkreten* (dem Lateinischen *concrētus ‚verdichtet/zusammengewachsen'* entlehnt (vgl. Kluge 2011, 524)) und dem *Abstrakten* (aus dem Lateinischen *abstractus ‚abgezogen'* (vgl. ebd., 10)) werden der dialektischen Logik entsprechend jedoch andere Vorstellungen verbunden, die der Etymologie der Worte eher entsprechen.

So wird das Konkrete als vielschichtige Ganzheit, als die Einheit aller Merkmale einer Entität gesehen, wogegen das Abstrakte als losgelöster Anteil von Merkmalen des Konkreten verstanden wird, die – durch den Prozess der Abstraktion aus den konkreten Elementen herausgelöst – weitgehend unabhängig vom konkreten Ganzen existieren (vgl. Bielefeld 2012, 72f. mit Bezug

[3] Bei dieser Literaturangabe wurde die Schreibweise der Originalquelle übernommen. Die unterschiedlichen Schreibweisen sind in abweichenden Transliterationen aus dem kyrillischen Alphabet begründet.

auf Davydov). Die Abstraktionen werden also in Wechselwirkung mit dem Konkreten gewonnen und helfen zugleich das Konkrete – was, wie deutlich geworden ist, auch das Komplexere ist – zu systematisieren und zu klassifizieren (vgl. Dawydow 1972, 242f.).

Doch wie vollziehen Menschen die Ausbildung von Abstraktionen? Hier kann nach Davydov zwischen empirischem und theoretischem Denken unterschieden werden (vgl. Dawydow 1972, 243ff.).

Obschon empirisches und theoretisches Denken ‚zwei Seiten einer Medaille' sind, sind die dahinterliegenden Prozesse verschieden (vgl. Rahde 2012, 197). Im Zuge *empirischen Denkens* werden sinnlich wahrnehmbare Phänomene aufgrund ihrer Oberflächeneigenschaften verglichen und anhand übereinstimmender äußerer Merkmale klassifiziert und abstrahiert (vgl. Rahde 2012, 197). Um ein oft genanntes Beispiel zu bemühen, könnte man durch alltägliche Beobachtungen mittels empirischen Denkens etwa zu dem Schluss kommen, dass es zum Wesen eines Vogels gehört zu fliegen, oder dass fliegende Lebewesen Vögel sind, was aus wissenschaftlicher Perspektive unzulässig ist (vgl. Pinguin & Fledermaus). Eine solche Begriffsbildung ist instabil und mühsam, da unzulässig entstandene Abstraktionen stetig revidiert werden müssen (vgl. Rahde 2012, 199). Zu fragen ist in diesem Zusammenhang, wie es gelingen kann, die Ausbildung von Abstraktionen so anzubahnen, dass aus der Mannigfaltigkeit des Konkreten die wesentlichen Momente erkannt werden. Hier ist der Prozess des theoretischen Denkens von großer Bedeutung.

Im Zuge dieses *theoretischen Denkens* wird nicht nach quantitativ häufig auftretenden äußeren Merkmalen systematisiert und abstrahiert, sondern entsprechend der qualitativen Tiefenstruktur der Gegenstände nach den konstituierenden Wesensmerkmalen einer Klasse von Erscheinungen (vgl. Rahde 2013, 199). Durch das Eindringen in die Tiefenstruktur der Phänomene können theoretische Begriffe gebildet werden, die ihrerseits in einer Relation zueinanderstehen (vgl. Bielefeld 2012, 69 mit Bezug auf Giest & Lompscher). Durch diese Begriffe und Relationen, die „alle Zusammenhänge und Wechselbeziehungen des Systems" (Bielefeld 2012, 70) ausdrücken, kann nun ein tieferes Verständnis der Wirklichkeit entstehen. Abstraktionen sind also nicht ihrer selbst wegen bedeutsam, sie „sichern erst durch ihre höhere Abstraktionskraft eine größere Reichhaltigkeit der Erfassung des Konkreten" (Jantzen 2004, 39).

Das theoretische Denken und die abstrahierten Begriffe verbleiben daher nicht auf der abstrakten Ebene – vielmehr befruchten sich Abstraktes und Konkrete durch ein tätiges Subjekt gegenseitig, sodass im Individuum „die Entstehung des Ganzen durch den Übergang vom Abstrakten zum Konkreten“ (Bielefeld 2012, 71) und durch den Übergang vom Konkreten zum Abstrakten im Sinne einer aufsteigenden Spirale vollzogen wird. Damit dieser Übergang gelingen kann, bedarf es Ausgangsabstraktionen, bedarf es einer elementaren Einheit der tragenden Abstraktionen und deren Relationen, die einen Gegenstand konstituieren – Jantzen spricht hier angelehnt an Vygotskij und Davydov von einer Keimzelle (vgl. Bielefeld 2012, 71).

In diesem Zusammenhang sei auf das Konzept der Invariante der russischen Psychologin Nina Fëdorovna Talyzina eingegangen. Dieses umfasst die Vorstellung, dass einige herausgelöste Elemente des Ganzen, des Konkreten, alle Fälle einer Gegenstandsklasse erzeugen und dass einige Elemente Eigenschaften nur einer Teilmenge einer Gegenstandsklasse ausmachen (dies wäre etwa das Fliegen der Vögel), mit den Begriffen Invariante und Variante (vgl. Bormann 2004, 69ff.). Die Invariante(n) ist (sind) dabei „das, ‚ohne das kein Fall bestehen kann‘“ (Bormann 2004, 69 mit Bezug auf einen mündlichen Vortrag Talyzinas). Diese invarianten Teile liegen „dem System zu Grunde […] und [erzeugen, T.R.] die gesamte Menge von Einzelfällen (Varianten)“ (Talyzina 2001, 211). Über die Invarianten eines Systems als Abstraktionen zu verfügen ermöglicht also das Eindringen in das Wesen des Systems, in einen Ausschnitt der Umwelt. Die Auseinandersetzung mit den Invarianten nimmt in der vorliegenden Arbeit auch nachfolgend einen besonderen Stellenwert ein.

Nach dieser Einführung einiger Begriffe sei nun auf Versuche der didaktischen Einbettung dieser Gedanken eingegangen. Dabei ist den vorgestellten Konzepten gemein, dass sie sich sowohl auf die kulturhistorische Schule/Tätigkeitstheorie, als auch auf die aus dieser Denkschule erwachsenen und vorhergehend dargestellten Vorstellungen der Begriffsbildung beziehen.

2.4.3.1 Die Lehr- und Lernstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten nach Joachim Lompscher (Rosemann)

Joachim Lompscher greift didaktische Implikationen von Davydov und El’konin zum Verhältnis des Abstrakten und Konkreten im didaktischen Kontext auf und entwickelt diese weiter (vgl. Rahde 2012, 193). Er geht von der bereits dargestellten Lerntätigkeit aus und sieht die Strategie

des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten [A → K] nicht als eine „konkrete Unterrichtsmethode […], sondern vielmehr als eine Art der Führung der Lerntätigkeit“ (Rahde 2012, 192 mit Bezug auf Lompscher). Doch das Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten ist nicht allein als Lehrstrategie, als das Planen des Unterrichts zu verstehen, es kann ebenso als eine Tätigkeitsstrategie, als ein Vorgehen für die Lernenden verstanden werden und demnach als eine Lernstrategie (vgl. ebd., 193).

Als Ausgangspunkt der Überlegungen können drei Widersprüche gesehen werden. Zuerst entspricht es den vorhergehend dargestellten Überlegungen, dass ein vorrangiges Ziel des Unterrichts die Ausbildung zulässiger Abstraktionen mit Ausrichtung auf die Tiefenstruktur des Wesens der Gegenstände sein muss. Allerdings ist es zur Erarbeitung dieser Abstraktionen notwendig über Kriterien zu verfügen, mithilfe derer Wesen-tliches und Un-Wesen-tliches voneinander unterschieden werde kann (vgl. ebd., 195f.; vgl. theoretisches vs. empirisches Denken). Zweitens ist das Ziel des Lernprozesses, dass ein Kenntnissystem in den Lernenden aufgebaut wird – dieses ist jedoch zugleich Voraussetzung dafür, *dass* Aneignung einsichtig, effizient und nachhaltig vollzogen werden kann (vgl. Rahde 2012, 196). Drittens – und darauf wurde bereits mehrfach verwiesen – ist die Eigenaktivität des Menschen für die Aneignung Voraussetzung. Dazu werden allerdings Lernhandlungen bezüglich eines Lerngegenstandes benötigt, die ja gerade erst durch die Auseinandersetzung mit diesem entstehen können (vgl. ebd.).

Gelöst werden sollen diese Antagonismen durch die Strategie [A → K], indem die Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Lernprozesses in eigener tätiger Auseinandersetzung am Konkreten *systematisch* die wesen-tlichen Begriffe und Begriffsrelationen als *Ausgangsabstraktionen* erarbeiten, die daraufhin für den weiteren Aneignungsprozess Mittel (Werkzeuge) der weiteren Auseinandersetzung und Aneignung sind, wobei sich damit auch die Abstraktionen weiter verändern (vgl. ebd. mit Bezug auf Lompscher). Demnach muss Ausgangspunkt der Auseinandersetzung das Sinnlich-Konkrete sein, damit Ausgangsabstraktionen entstehen können, die dann schließlich zur Ausbildung des inneren, geistigen Konkreten führen (vgl. ebd., 201f.).

Eine Möglichkeit der Gestaltung des Weges zur Ausbildung von Ausgangsabstraktionen, der mögliche Fehlabstraktionen zu vermeiden versucht, ist die Orientierung an der phylogenetischen, also an der kultur-historischen Genese eines Gegenstandes (vgl. Rahde 2012, 202 mit

Bezug auf Lompscher). Dieser Aneignungsweg entspricht zutiefst der kulturhistorischen Theorie – es kann angenommen werden, dass die Gegenstände phylogenetisch in menschlicher Tätigkeit (weiter-)entwickelt wurden, um gewisse Motive und Ziele zu erfüllen, die nicht selten aus der Konfrontation mit Herausforderungen erwachsen sein dürften.

Die Strategie [A → K] vollzieht sich in zwei Etappen. Während der ersten Etappe erarbeiten die Lernenden in aktiver Auseinandersetzung mit einem ausgewählten, „besonders akzentuierte[n] Konkreten“ (ebd., 204) in der Zone der nächsten Entwicklung die angesprochenen Ausgangsabstraktionen (vgl. ebd., 203ff.). Im Zuge der zweiten Etappe werden diese erarbeiteten Mittel für eine aufsteigende Durchdringung des gesamten Systems genutzt, wobei ein tieferes Eindringen in das Abstrakte und das Konkrete zugleich vollzogen wird, sodass der Gegenstand schrittweise durchdrungen werden kann (vgl. ebd., 205ff.). Bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass die Ausgangsabstraktionen keinesfalls den Gegenstand voll umfassen müssen. Vielmehr können auch dem Entwicklungsstand der Lernenden adäquate Ausgangsabstraktionen erzeugt werden, die, wenn ihre Erklärungskraft im Zuge des Prozesses erloschen ist, durch neue Ausgangsabstraktionen auf einem höheren Niveau ersetzt werden können (vgl. ebd., 206).

Besonders zu betonen ist bezüglich des Konzepts [A → K] neben der herausragenden theoretischen Fundierung in der kulturhistorischen Theoriebildung, dass es „durch die zahlreichen Schulversuche über eine gut dokumentierte empirische Datenbasis verfügt“ (ebd., 212), womit es einem Qualitätsanspruch genügt, der in einer Zeit, in der „die sonderpädagogischen Lehrstühle und Experten […] zunehmend eindeutig für die vorwiegend hypothesenprüfende Ausrichtung oder für eine eher rekonstruktiv oder hermeneutisch arbeitende Sonderpädagogik“ (Lehrstuhl für Pädagogik bei Lernbeeinträchtigungen - Sonderpädagogik I der Universität Würzburg, o.J., o.S.) stehen, nicht selbstverständlich ist[4] .

2.4.3.2 Invarianter Unterricht nach Nina Fëdorovna Talyzina (Rosemann)

Eine mit der Strategie [A → K] gut zu vereinbarende Konzeption ist der Unterricht entlang invarianter Inhalte nach Talyzina, der „auf Gal’perins Forschungen und Erkenntnissen zum etappenweisen Aufbau geistiger Handlungen“ (Ziemen 2018, 145) aufbaut und insbesondere

[4] Wobei das inklusive Potential der Konzeption gerade darin liegt, nicht ausdrücklich sonderpädagogisch, sondern eben allgemeinpädagogisch bzw. -didaktisch zu sein. Ähnliche Entwicklungen lassen sich allerdings übergreifend in den Humanwissenschaften beobachten.

die – vorhergehend bereits dargestellte – Orientierungsgrundlage menschlicher Handlungen als Ausgangspunkt der Konzeption nutzt.

Die Bezeichnung des invarianten Unterrichts als eine Form des Unterrichts rührt aus der Kritik Talyzinas an der traditionellen Schulpraxis, im Zuge derer Schülerinnen und Schüler ein hohes Maß an Einzelfakten auswendig lernen sollen, aber dennoch nicht in allen Fällen erwünschte fachliche Denkmodi ausbilden. Daraus erwächst die Forderung, dass es einer Neuorientierung der Unterrichtsfächer entlang der reduzierten, aber wesen-tlichen invarianten Inhalte bedarf (vgl. Bormann 2004, 64; vgl. empirisches vs. theoretisches Denken).

Der Unterricht sollte nach Talyzina (2001) auf dem dritten Typ der Orientierungsgrundlage aufbauen, da Handlungen hier „schnell und praktisch fehlerlos angeeignet“ (211) werden, nachhaltig sind und gut auf eine breite Zahl an Einzelfällen übertragbar sind (vgl. ebd.). Für eine Unterrichtung in Orientierung am dritten Typ der Orientierungsgrundlage müssen die Invarianten hergeleitet werden – das, was Lompscher als Ausgangsabstraktionen bezeichnet, entspricht etwa dem System der Invarianten eines Gegenstands nach Talyzina (vgl. Rahde 2012, 193). Auch hier werden die Invarianten als Mittel zur Aneignung der Varianten genutzt, wobei auch hier ausgewählte Varianten für eine erste Aneignung der invarianten Kenntnisse genutzt werden (vgl. Bormann 2004, 69ff.). Dazu sollen die Schülerinnen und Schüler die Orientierungsgrundlage in Form der Invarianten mithilfe einer allgemeinen Methode selbstständig ermitteln (vgl. Talyzina 2001, 207).

Auch die Unterrichtung entlang der Invarianten genügt der Forderung nach einer hohen Güte wissenschaftlicher Erkenntnisse durch eine tiefgreifende theoretische Fundierung bei gleichzeitiger empirischer Absicherung (vgl. Talyzina 2001, 207ff.; vgl. Bormann 2004,67f.).

Leider steht eine umfassende Erarbeitung der Invarianten für verschiedene Unterrichtsfächer noch aus (vgl. Ziemen 2018, 146f.).

2.4.3.3 Der entwickelnde Unterricht nach Mariane Hedegaard (Rosemann)

Die Entwicklungspsychologin Mariane Hedegaard nutzt Grundlagen der kulturhistorischen Schule, wie etwa „die Grundlagen der kindlichen Entwicklung (El‘konin), der Begriffsbildung bzw. Lerntätigkeit (Davydov), Motive und Motivbildung und die Zone der nächsten Entwicklung (Vygotskij)“ (Geise 2012, 14) für ihre Konzeption eines entwickelnden Unterrichts. Dieser

wird als entwickelnd bezeichnet, weil die gesamte Persönlichkeit der Lernenden in den Fokus gerückt wird und durch „einen Entwicklung fördernden, also entwickelnden Unterricht“ (ebd., 20) ausgebildet werden soll.

Ein wesentlicher Aspekt der Konzeption ist die Double-move-Methode, innerhalb derer in gegenseitigem Austausch „zwischen dem Modell des Begriffs, das der Lehrer hat und das die Schüler aus ihrem Alltagswissen entwickeln“ (Geise 2012, 29) theoretisches Denken und Abstraktionen entwickelt werden sollen – einem Zusammenhang der im kulturhistorischen Diskurs auch mit den Begriffen der ‚ideellen Form‘ als gesellschaftlich elaborierte Form der Begriffe/Inhalte und der ‚rudimentären Form‘ als dem Verständnis des Subjekts gefasst wurde (vgl. Rahde 2012, 207). In diesem Zusammenhang muss auch auf die kulturhistorische Unterscheidung von ‚Sinn‘ als die individuelle Zuschreibung eines Gegenstands, als Sinn *für* das Subjekt und von ‚Bedeutung‘ als gesellschaftliche Relevanz eines Gegenstandes eingegangen werden, die in der Konzeption Hedegaards durch die Double-move-Methode berücksichtigt werden, da von der Sinngebung der Lernenden (und ihrer rudimentären Form) auf die Bedeutung des Gegenstands in seiner ideellen Form hingearbeitet wird (vgl. Geise 2012, 30).

Betont wird also im Zuge der Konzeption, dass für die Ausbildung theoretischen Denkens nicht nur ein Ausgehen von den Alltagsbegriffen der Lernenden notwendig ist, sondern auch ein Ausgehen von den Motiven der Schülerinnen und Schüler, die sich während der Ausbildung ihres Denkens auf einem höheren Niveau in der Gemeinschaft weiterentwickeln (vgl. ebd., 30).

Die Planungsprinzipien des entwickelnden Unterrichts sind am Verlauf der Lernhandlungen orientiert (vgl. ebd., 34). Diese sind:

1. Jedes Kind wird bei der Planung des Unterrichts berücksichtigt – gerade auch in Hinblick auf die Zone der nächsten Entwicklung.
2. Die Erfahrungen der Lernenden müssen der Ausgangspunkt aller Unterrichtsinhalte sein.
3. Alle Inhalte müssen einen direkten und unmittelbar einsichtigen Bezug auf die grundsätzlichen Themen aufweisen.
4. Während des Unterrichts soll sich die Motivation der Lernenden auf die Gegenstände richten, sie soll durch diese entstehen. Dies geschieht etwa durch die Behandlung fundamentaler kindlicher Fragen, etwa nach dem Ursprung des Menschen.

5. Die Lernenden sollten (der kulturhistorischen Theorie entsprechend) befähigt werden, Werkzeuge in Form von Modellen zu nutzen, um sich die Umwelt anzueignen und sie zu untersuchen.
6. Das Wissen muss sich auf die Leistungen der Aneignung der Lernenden beziehen. (vgl. ebd.)

Hedegaard beschreibt zudem vier Prinzipien des Double-move:

1. Zuerst müssen Probleme gefunden werden, die sowohl die wesen-tlichen Begriffe und Begriffsrelationen sowie Arbeitsmethoden einschließen, also auch den Motiven der einzelnen Lernenden entsprechen.
2. Darauf aufbauend werden sog. Keimzell-Modelle (s.u.) erstellt, wobei
3. ausgehend von wissenschaftlichen Forschungsmethoden für die Hand der Lernenden entwickelt werden.
4. Auf diesen Grundlagen aufbauend werden dann Unterrichtsphasen durchlaufen, innerhalb derer die Lernenden ihr Wissen und ihre Fähig- und Fertigkeiten qualitativ verändern. Diese entsprechen dem Dreischritt ‚(Lern-)Ziele beschreiben, Lernhandlungen durchführen, Lernhandlungen bewerten'. (vgl. ebd., 35ff.).

Sowohl im fünften Prinzip der Planung des entwickelnden Unterrichts, als auch im dritten Prinzip des Double-move werden Keimzell-Modelle genutzt, die als Mittel der kindlichen Aneignung dienen – sie sind Darstellungen der Ausgangsabstraktionen (vgl. Rahde 2012, 205). Gleichzeitig könnte man mit Bezug auf die Invariante Talyzinas die Keimzell-Modelle als Darstellung der Invarianten und ihrer Beziehungen verstehen – es wird hier also davon ausgegangen, dass die elementaren, wesen-tlichen Beziehungen eines Gegenstands durch ein Modell darstellbar sind.

Wie durch diesen Vergleich deutlich wird, ist „ein umfangreiches Wissen über das zu untersuchende Fachgebiet" (Geise 2012, 37) für die Erstellung der Keimzell-Modelle vonnöten (ähnlich wie dies bei der Bestimmung des gemeinsamen Gegenstands nach Feuser der Fall ist). Einmal herausgearbeitet, bieten sie für die Lehrkräfte aber eine Folie für die Planung des Unterrichts, da an ihnen die praktischen Aufgaben für die Begriffsaneignung geplant werden. Zwei bedeutsame Eigenschaften charakterisieren die Keimzell-Modelle in der Konzeption:

> Das Keimzell-Modell bildet die Basisbeziehungen zwischen ergänzenden Begriffen des Fachgebietes ab. Wenn ein Aspekt sich ändert, kann der Einfluss dieses Wandelns auch in anderen abgebildeten Aspekten folgen. Die Basisbeziehungen können in der die Schüler umgebenden Realität erkannt werden (Geise 2012, 37).

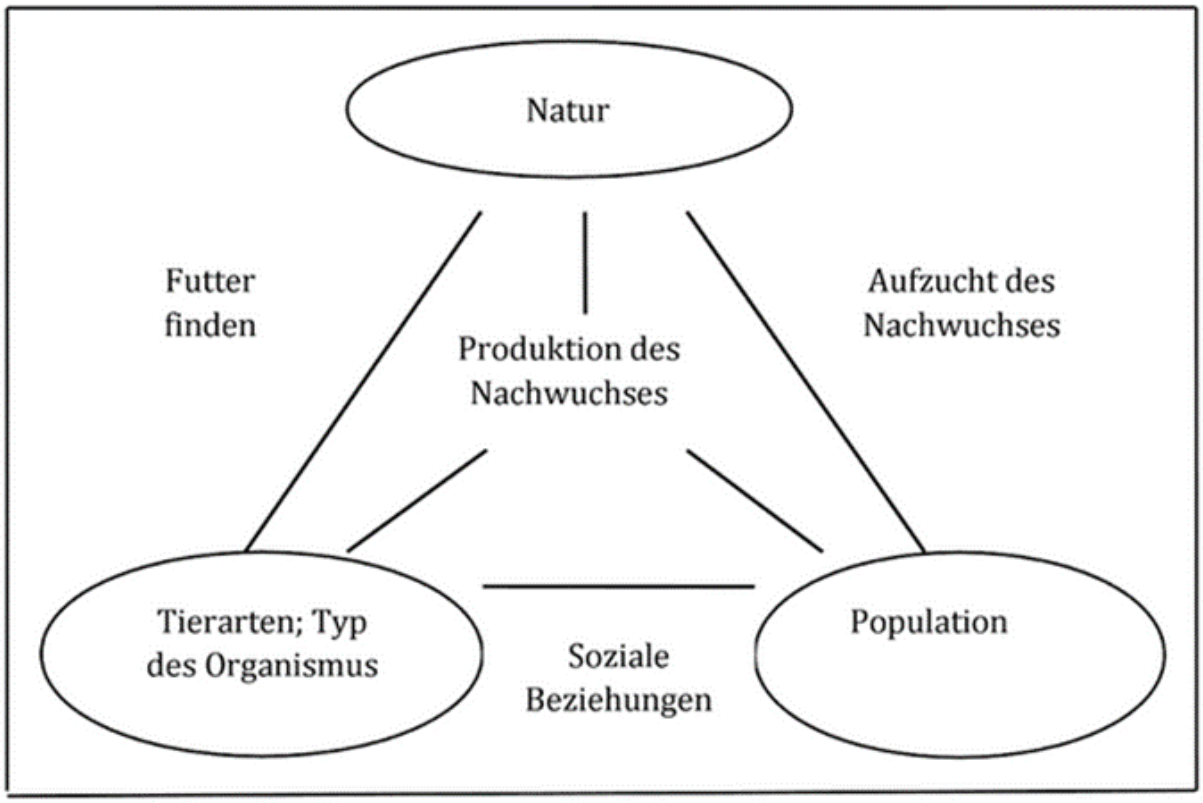

Abb. 4: Keimzell-Modell zum Problembereich der Evolution der Tiere nach Hedegaard 2005 aus Geise 2012, 38.

Die Lernenden erstellen und verändern – ähnlich dem Prozess des stetigen Veränderns der Ausgangsabstraktionen – die Keimzellmodelle im Zuge ihrer Lernhandlungen (vgl. Geise 2012, 47f.).

Hedegaard leitete eine mehrjährige Projektstudie zum entwickelnden Unterricht an einer dänischen Grundschule und kommt nach einer qualitativen Analyse zur generellen Bewertung, dass der Unterricht dahingehend erfolgreich war, dass sich in innerer Differenzierung (!) entwicklungsangemessen Begriffe und Motive vielschichtiger ausgebildet haben, als dies in anderen Grundschulkassen der Fall ist (vgl. Geise 2012, 54f.).

2.4.4 Zum Bildungsgehalt des Stellenwertsystems (Schwarzenberg)

Im Folgenden Kapitel soll im Zuge der Gegenstandsanalyse die Geschichte der Zahl und ihrer Darstellungen nachvollzogen werden, wobei vor allem Probleme und ihre Lösungen betrachtet werden. Dabei wird gleichzeitig der Frage nachgegangen werden, welche Ausgangs- und welche fortführenden Abstraktionen aus der Phylogenese der Zahlen und ihrer Darstellung gewonnen werden können.

Bevor jedoch diese Ausführungen folgen, soll kurz skizziert werden, warum Zahlen und Zahldarstellungen einen zentralen Bildungsinhalt darstellen.

Dies geschieht unter Rückgriff auf die Begrifflichkeiten des Elementaren, Fundamentalen, der Gegenwarts- und Zukunftsbedeutung sowie des Exemplarischen. Denn Georg Feuser hat diese Begriffe nach W. Klafki in seine entwicklungslogische Didaktik einfließen lassen (vgl. Siebert 2010, 108) – und diese stellt eine wesentliche Grundlage der MRD dar.

Das Exemplarische wird als die Auswahl desjenigen Lerngegenstandes gedacht, in dem sich das Allgemeine im Besonderen zeigt. Die Auswahl kann durch die Orientierung an epochaltypischen Schlüsselproblemen (in der kritisch-konstruktiven Didaktik nach W. Klafki) getroffen werden (vgl. Jantzen 2004, 43f.). Die Entscheidung für Unterrichtsgegenstände, die dem Anspruch des Exemplarischen gerecht werden, soll innerhalb der Unterrichtskonzeption erst erarbeitet werden. Ihre Aufgabe ist es den Lernenden zu ermöglichen „elementare und fundamentale Momente des Gegenstands zu erschließen." (Siebert 2010, 108) Hierbei wird das Entwickeln von persönlicher Bedeutung aus der sozialen Bedeutung als elementare Erfahrung gedacht. Die Entwicklung von Sinn innerhalb der Lernenden selbst stellt die fundamentale Erfahrung dar (vgl. ebd.; vgl. Jantzen 2004b, 43). Durch das Fundamentale und Elementare, vermittelt durch das Exemplarische, findet also eine doppelseitige Erschließung im Sinne kategorialer Bildung statt; nämlich wird der Lerner oder die Lernerin für den Lerngegenstand (Sinn) erschlossen sowie der Lerngegenstand für den Lerner oder die Lernerin (Bedeutung) (vgl. Feuser 2013, 287).

Die Gegenwartsbedeutung der Zahl und ihrer Darstellung kann bereits durch ihren hohen Stellenwert in der individuellen Lebenswirklichkeit als gegeben angenommen werden, da Zahlen und ihre Darstellung Einfluss auf gesellschaftlicher wie auch auf individueller Ebene haben. Die direkte Alltagserfahrung, dass das Tanken, eine Supermarkt- oder sonstige bargeldgebundene

Transaktionen mithilfe von Zahlen verlaufen, ist Kindern bereits früh vertraut. Die Vorstellung, dies ohne Zahlen und ihre Darstellung zu handhaben herausfordernd. Statistiken, Kalkulationen, Informatik mit gesellschaftsbeeinflussenden Aspekten, wie Big Data, funktionieren nur mit Mitteln des Stellenwertsystems und üben dadurch (indirekt) Einfluss auf die gesamte Gesellschaft und demnach auch auf einzelne Personen aus. Das Verstehen des Stellenwertsystems und dem Umgang mit diesem leistet demnach einen Beitrag zum individuellen Empowerment und steigert dadurch die Selbst-, Mitbestimmungs-, aber auch die Solidaritätsfähigkeit.

Vor allem die direkten Einflüsse von Zahlen und ihren Darstellungen werden Lernende in ihrem Alltag erlebt haben – vielleicht aber ohne diese zu reflektieren. Denn Kinder und Jugendliche, die die Schule besuchen, wachsen demnach in einer Umwelt auf und in sie hinein, die durch Zahlen, Zahldarstellungen und Rechenoperationen, zumeist im Dezimalsystem, geprägt sind und gesteuert werden.

Da der Schulbesuch auf den Eintritt in die Arbeitstätigkeit vorbereiten soll, ist das Auseinandersetzen mit Zahlen, das Erlernen von Rechenstrategien und das Aneignen von Handlungsmöglichkeiten (im Dezimalsystem) unerlässlich. Gleichzeitig jedoch ist ein Wissenskanon über Zahlen und den Umgang mit ihnen nicht nur als materiales Bildungsgut anzunehmen, sondern gerade als ein formales, da das Verstehen und Nutzen von Stellenwertsystemen zur eigenen Umwelterschließung beiträgt. Das bedeutet für Schule und Unterricht, dass im Sinne des Elementaren die gesellschaftliche Bedeutung von Zahlen, ihren Darstellungen, Operations- und auch Simulationsmöglichkeiten eine persönliche Bedeutung dessen entsteht. Durch das Fundamentale hingegen wird der Sinn von Zahlen und Zahldarstellungen für das Individuum konstituiert und ermöglicht handeln, operieren und demnach tätig sein in der Lebensumwelt.

2.4.5 Gegenstandsanalyse – das Stellenwertsystem und die Geschichte der Zahl: Probleme – Lösungen – Abstraktionen (Rosemann)

Das Verwenden von und das Denken in Zahlen mag angesichts der Selbstverständlichkeit des Umgangs und der unmittelbar einsichtigen Logik der Zuordnung von abstrakten Zahlen zu konkreten Entitäten wie eine natürliche Disposition des Menschen erscheinen. Doch auch wenn die Entdeckung der Zahl – oder vielmehr wohl zuerst die Entdeckung des Zählens, worauf im Folgenden noch einzugehen sein wird – sogar noch vor der Erfindung des Rads stattfand (vgl. Ifrah

1991, 15), musste sie im Laufe der kultur-historischen Phylogenese des Menschen erst in ihrem heutigen Begriffsumfang konstituiert werden.

Doch gerade dieser Weg, der als Problemlöseprozess begriffen werden kann, der in immer weiter aufsteigenden Abstraktionen mündete – auch dies wird nachstehend noch zu zeigen sein – ist es, der aus kulturhistorischer Perspektive bedeutsam für eine gesteuerte tätige Aneignung dieses Ausschnitts der Welt ist. Denn der Mensch eignet „sich die von vorangegangenen Generationen geschaffene Kultur“ (Lompscher 2004, 62) in der Tätigkeit an – die Psyche des Menschen ist Ergebnis von gemeinsamer Tätigkeit unter den Bedingungen und an der selbst geschaffenen zweiten Natur. Aus dem kulturhistorischen „Verständnis des Psychischen ergibt sich die Notwendigkeit eines *kausal-genetischen Vorgehens*, d.h. der Analyse des Psychischen im Prozess seiner Genese – vom Tier-Mensch-Vergleich und von historischen und kulturvergleichenden Studien“ (Lompscher 2004, 36, Hervorhebung im Original). Lompscher (2004) konstatiert weiter: Allein „der Unterricht ist gut (d.h. entwicklungsförderlich), der sich […] auf die gerade in Entwicklung befindlichen psychischen Funktionen orientiert und sich dabei auf die innere Logik der historischen Entwicklung des Denkens, des Sprechens, usw. stützt, die in der Kultur materialisiert sind“ (38). Und auch Davydov fordert, dass die Lernenden „in komprimierter, verkürzter Form den tatsächlichen historischen Prozess der Entstehung und Entwicklung des Wissens reproduzieren“ (Dawydow 1977, zit. n. Jantzen 2006, 12) sollten. Die Untersuchung des Weges der phylogenetischen Entwicklung mathematischen Denkens erscheint also notwendig, um Unterricht bezüglich des Kulturguts *Zahl* entsprechend der kulturhistorischen Theorie konzipieren zu können.

Deswegen seien in diesem Kapitel wesentliche Meilensteine der Zahlentwicklung, welche in unserem heutigen dezimalen Stellenwertsystem gipfelte, dargestellt. Dabei kann und wird nachstehend jeder Meilenstein nach einer Beschreibung der jeweils gelösten Probleme durch die jeweils erreichten Abstraktionen dargestellt werden, sodass abschließend der Weg der Zahlentwicklung anhand dieser wesentlichen Abstraktionen nachvollzogen werden kann. Allerdings ist anzumerken, dass der tatsächliche Weg dieser Entwicklung nicht detailgetreu beschrieben wird und wohl in letzter Konsequenz auch nicht beschrieben werden kann (vgl. Ifrah 1991, 545).

Doch wie lässt sich die Auffassung, dass innerhalb der Zahlentwicklung Abstraktionen als Mittel der Problemlösung entstanden sind und wie das Vorgehen dieses Kapitels, nicht streng chronologisch, sondern eher auf aufsteigende Abstraktionen fokussierend vorzugehen, rechtfertigen?

Dies ist darin begründet, dass zahlbezogene Abstraktionen in der Geschichte nicht nur von Generation zu Generation oder von Volk zu Volk überliefert, sondern auch als bedeutende Innovationen *mehrfach* erfunden wurden. So ist es nicht nur „erstaunlich, mit welch gleichartigen Mitteln weit voneinander entfernte Völker ihre ersten Zählversuche unternommen haben“ (Ifrah 1991, 16). Auch die Darstellungen von Zahlen und die Bündelungen ebendieser (vgl. Ifrah 1991, 169ff.), die Verwendung erster Hilfsbasen (vgl. Ifrah 1991, 257ff.), das Verkürzen der Zahldarstellung (vgl. ebd., 362ff.), die Entwicklung erster Stellenwertsysteme als einer „allgemeinen Tendenz“ (ebd., 469f.) sowie die Erfindung der Null (vgl. ebd., 481; vgl. Kaplan 2005) sind Beispiele für Innovationen, die mehrfach und vermutlich oft ohne weitere Einflüsse gelangen. Dies stützt die Vermutung, dass Menschen in verschiedenen Lebensräumen und Kulturen nicht nur mit ähnlichen Problemen und (zahlbezogenen) Gegebenheiten konfrontiert waren, sondern dass sie auch ähnliche Mittel entwickelten, um mit diesen Herausforderungen umzugehen. Daher stehen nachfolgend diese wesentlichen Probleme, ihre Lösungen und die entsprechenden Mittel im Vordergrund.

Zu vermuten ist, dass es einen Ur-Zustand des Zahlbewusstseins der Menschheit gab, der vom sogenannten Z*ahlgefühl* (engl. Number Sense) geprägt war (vgl. Ifrah 1991, 23; vgl. Dantzig 2005, 1). Ähnlich wie dies für einige Tiere vermutet wird, wie es in frühen ontogenetischen Entwicklungsphasen wohl der Fall ist und wie es noch heute teilweise in kleinen Bevölkerungsgruppen, wie etwa den Pirahã Brasiliens zu beobachten ist, war die Zahlwahrnehmung des Menschen vermutlich an konkrete Mengen, also etwa ‚so viele Beeren‘ oder ‚so viele Schafe‘ gebunden, ohne das Verfügen über Abstraktionen von Zahlen als Einheiten, die im Grunde vielen unterschiedlichen konkreten Mengen zuordbar wären (vgl. Ifrah 1991, 14).

Bevor auf dieses Stadium des Zahlgefühls näher eingegangen wird, sei zum Verständnis der Tragweite dieses Zustandes auf eine Anekdote des Linguisten Daniel L. Everett eingegangen, der das Volk und die Sprache der Pirahã untersuchte. Da die Pirahã keine Zahlwörter und wohl auch keine über das natürliche Zahlgefühl hinausgehenden Zahlbegriffe hatten, fürchteten sie

beim Handel, der nicht allein aus direktem Tausch bestand, betrogen zu werden, weshalb sie den Linguisten und seine Frau um Unterricht baten (vgl. Everett 2005, 625f.). Everett (2005) beschreibt daraufhin den Unterricht und seine Ergebnisse wie folgt:

> In 1980, at the Pirahã' urging, my wife and I began a series of evening classes in counting and literacy. My entire family participated, with my three children (9, 6, and 3 at that time) sitting with Pirahã men and women and working with them. Each evening for eight months my wife would try to teach Pirahã men and women to count to ten in Portuguese. […] After eight months of daily efforts, without ever needing to call the Pirahã to come for class (all meetings were started by them with much enthusiasm), the people concluded that they could not learn this material and classes were abandoned. Not one Pirahã learned to count to ten in eight months. None learned to add 3+1 or even 1+1 (625f.).

Dieser erstaunliche Erfahrungsbericht zeigt auf, welch elaborierte Abstraktionen hinter vermeintlich simpler Mathematik vermutet werden müssen.

Eine Begründung für die Schwierigkeit der Zahlwahrnehmung und des Zahlbegriffs ist in der Beschaffenheit des Zahlgefühls zu vermuten. Georges Ifrah (1991) schreibt über diesen Zustand:

> Soweit wir vermuten können, hatte der Zahlenbegriff unserer frühen Vorfahren die Form einer konkreten Realität, die von der Natur der Gegenstände unablösbar war, wobei sich dieser Begriff zweifellos auf die direkte Wahrnehmung einer natürlichen Vielzahl beschränkte (23).

Dies bedeutet, dass die Mächtigkeit (die Größe) einer Menge wohl nur sinnlich wahrgenommen werden konnte, dass etwa die Mächtigkeit einer Herde allein holistisch während der Betrachtung in Erscheinung trat. Sie war in einem solchen Stadium vermutlich kaum oder gar nicht kognitiv als abstrakte Anzahl repräsentiert, sobald sie nicht mehr sinnlich wahrnehmbar war (vgl. Ifrah 1991, 24). Außerdem konnten die Menschen wohl Veränderungen der Mächtigkeit einer Menge, die die natürliche Vielzahl überschreitet, nicht wahrnehmen (vgl. ebd., 14).

Mit einer *natürlichen Vielzahl* sind in diesem Zusammenhang Anzahlen gemeint, die die Aufmerksamkeitsspanne eines Menschen, der nicht im kulturhistorischen Sinne über Mittel verfügt, diese natürliche Wahrnehmung zu überformen, nicht überschreiten. Klassischerweise wurde diesbezüglich in der Psychologie davon ausgegangen, dass Mengen von ein bis drei, teilweise auch vier Einzelelementen ohne Abzählen vom Menschen erfassbar seien (vgl. Dehaene 1999, 82ff.). Diese Erkenntnisse wurden im Zuge der Neurodiversitätsdebatte inzwischen relativiert,

etwa durch Forschungsergebnisse André Frank Zimpels (2016a), der die Aufmerksamkeitsspanne von Menschen, die unter den Bedingungen einer Simultanagnosie, einer Trisomie 21 oder einer sog. Autismus-Spektrum-Störung leben, untersuchte (vgl. 99). Hierbei stellte sich heraus, dass die Aufmerksamkeitsspanne dieser Personengruppen deutlich von den Wahrnehmungsmöglichkeiten sog. neurotypischer Personen abwich, wobei teilweise mehr, teilweise weniger Einzelelemente wahrgenommen werden konnten (vgl. ebd.).

Allerdings muss davon ausgegangen werden, dass diese sog. nicht-neurotypischen Personengruppen im Verlauf der zehntausende Jahre zurückreichenden Geschichte der Zahlentwicklung wohl noch stärker marginalisiert wurden als dies in heutigen Gesellschaften der Fall ist, weshalb vermutlich fast ausschließlich sog. neurotypische Personen die (Weiter-)Entwicklung des Zahlbegriffs vollzogen. Zumindest die Beobachtung, dass Menschen im Laufe der Geschichte unabhängig voneinander die Zahldarstellungen auf die neurotypisch passenden Wahrnehmungsmengen (dies sind die natürlichen Vielzahlen) von drei oder vier Elementen ausrichteten (vgl. Ifrah 1991, 169ff.) scheint diesen Gedanken zu stützen.

Der Annahme folgend, dass ein Großteil der Menschen die Drei oder Vier als natürliche Vielzahl wahrnehmen konnte, muss also davon ausgegangen werden, dass größere Mengen ohne weitere Mittel in einem Ur-Zustand der Zahlbegriffsentwicklung nicht wahrgenommen oder differenziert werden konnten. Dies ist leicht nachzuvollziehen, wenn wir uns bemühen, den Inhalt einer gefüllten Spardose zu bestimmen. Ohne Mittel im kulturhistorischen Sinne, etwa dem Bilden von Münztürmchen (Bündelung) oder dem Abzählen, ist es für große Mengen unmöglich, die Anzahl der Münzen zu bestimmen.

Bevor erste historische Mittel zum Umgang mit dem Problem – man könnte sagen – *unnatürlicher Vielzahlen* (dies wären also Mengen > 4, die nicht allein durch die sog. neurotypische menschliche Wahrnehmung erfasst werden) dargestellt werden, sei summarisch auf das Zahlgefühl einiger Tiere eingegangen. Diese scheinen teilweise über ähnliche Möglichkeiten der Wahrnehmung natürlicher Vielzahlen zu verfügen, womit weitere Argumente für die Annahme eines Ur-Zustands der Zahlwahrnehmung angeführt werden können.

So wurde von Fällen berichtet, in denen Affen, Elefanten oder Hunde Veränderungen von Menge der Mächtigkeit einer geringen natürlichen Vielzahl bemerkten (vgl. Ifrah 1991, 21). Auch Vögel scheinen über ein natürliches Zahlgefühl zu verfügen:

> If a nest contains four eggs one can safely be taken, but when two are removed the bird generally deserts. In some unaccountable way the bird can distinguish two from three (Dantzig 2005, 1).

Experimente mit Stieglitzen zeigten sogar, dass die Vögel „gewöhnlich drei von eins, drei von zwei, vier von zwei, vier von drei und sechs von drei unterscheiden konnte[n], aber fast immer fünf und vier, sieben und fünf, acht und sechs sowie zehn und sechs verwechselte[n]“ (Ifrah 1991, 21).

Dantzig (2005, 3) beschreibt die Geschichte eines Schlossherren der einen in seinem Wachturm nistenden Raben töten wollte. Der Rabe floh auf einen nahe gelegenen Baum, sobald eine Person den Wachturm betrat und kehrte erst wieder in sein Nest zurück, sobald er die Person weggehen sah. Die List, zwei Personen den Turm betreten, aber nur eine Person wieder hinunter gehen zu lassen, konnte den Raben nicht überlisten. Erst als auch die zweite Person den Turm verließ, flog der Rabe zurück – er konnte anscheinend eins und zwei unterscheiden. Auch Versuche drei Menschen hoch und zwei hinunter sowie vier Personen hoch und drei hinunter zu schicken missglückten aus der Perspektive des Schlossherren. Erst als fünf Menschen hoch- und nur vier hinunterliefen schien der Rabe die Menge der Personen nicht mehr überblicken zu können und flog zurück in sein Nest. Die wahrnehmbare natürliche Vielzahl des Raben schien also die Größe vier zu haben.

Doch mit welchen Mitteln hat nun die Menschheit, anders als Tiere, wie etwa der beschriebene Rabe, das *erste Problem des Umgangs mit unnatürlichen Vielzahlen* lösen können? Wollte man insgesamt nur ein wesentliches Mittel, um sich von der unnatürlichen Vielzahl zu lösen, benennen, so wäre es das *Zählen* (vgl. Dantzig 2005, 5). Allerdings impliziert das nicht, dass dieses Mittel nicht stufenweise zu entwickeln war. Vielmehr scheint das Zählen aus verschiedenen Innovationen hervorgegangen zu sein.

Ausgehend vom Zahlgefühl, welches durch keinen abstrakten Zahlbegriff gekennzeichnet war, mussten schließlich erste Schritte zur Erfassung der Mächtigkeit von Mengen erfolgen. Doch musste sich dazu vermutlich gar kein abstrakter Zahlbegriff im heutigen Sinne ausbilden – obschon natürlich erste Abstraktionen, also Herauslösungen aus dem Komplex des Konkreten vollzogen wurden. Trotzdem kann es „als erwiesen angesehen werden, dass *der Mensch über*

viele Jahrhunderte hinweg größere Mengen ‚zählen' konnte, ohne über einen abstrakten Zahlbegriff [im heutigen Sinne, T.R.] *zu verfügen*" (Ifrah 1991, 27, Hervorhebung im Original). Sogar das Rechnen war den Menschen bereits ohne einen solchen abstrakten Zahlbegriff allein mit äußeren Mitteln möglich.

Bemühen wir zur Erklärung dieses Verfahrens zuerst eine fiktive Geschichte Georges Ifrahs (1991):

> Stellen wir uns einen Hirten vor […] der eine Hammelherde zu hüten hat […]. Es handelt sich um 55 Hammel, aber unser Hirte ist nicht in der Lage zu begreifen, was die Zahl 55 bedeutet. Er weiß lediglich, daß er ‚viele' Hammel hat. Da ihm diese Aussage zu ungenau ist, möchte er doch gerne wissen, ob seine Hammel jeden Abend auch vollzählig zurückgekehrt sind. So hat er eines Tages eine Idee… Es setzt sich in den Eingang seiner Höhle und läßt seine Hammel einen nach dem anderen hinein. Jedesmal, wenn ein Hammel an ihm vorbeikommt, macht er eine Kerbe in einen Wolfsknochen […]. Auf diese Weise hat er mit dem Durchgang des letzten Tieres genau fünfundfünfzig Kerben geschnitzt. Nun legt er jeden Abend, wenn seine Hammel wie immer einer hinter dem anderen zurückkommen, jedesmal den Finger in eine Kerbe, von einem Ende des Knochens bis zum anderen. Und wenn sein Finger dann bei der letzten Kerbe angekommen ist, ist unser Hirte beruhigt (28f.).

Was sind nun die Errungenschaften des fiktiven Hirten?

Zum einen hat er eine erste Abstraktion im Sinne des Herauslösens einer Eigenschaft aus einer verdichteten konkreten Realität vollzogen, nämlich eine *Eins-zu-Eins-Zuordnung* eines konkreten Objekts (oder besser der Anzahl ‚1' eines konkreten Objekts) zu einem weiteren physikalischen Objekt (hier zu einer Kerbe). Insbesondere ist es hier egal, *welche* konkrete Menge mit den Kerben erfasst wird, sodass eine erste quantitative Messung vollzogen wird. Dies ist „die Geburtsstunde des abstrakten Zahlbegriffs" (ebd., 36).

Zweitens hat er durch diese Eins-zu-Eins-Zuordnung (auch: paarweise Zuordnung oder Bijektion) eine neue Menge gleicher Mächtigkeit gebildet, die er als *Hilfsmenge* nutzt, um materialgebunden mittels erneuter Eins-zu-Eins-Zuordnung rechnen zu können. So kann er die Relationen kleiner, gleich und größer erfassen. Sind weniger Hammel zählbar als Kerben zur Verfügung stehen, fehlt mindestens ein Hammel. Sind hingegen mehr Hammel zählbar, scheint ein Tier hinzu gekommen zu sein.

Drittens hat der Hirte durch seine Kerben eine erste Zahldarstellung erzeugt. Diese kann er zwar begrifflich nicht fassen, da sie noch immer in seiner Wahrnehmung eine konkrete Zahl ist, er

kann jedoch seine Zahldarstellung betrachten oder vorzeigen und signalisieren, er habe *so* viele Hammel. Allerdings ist er nicht im Stande zu benennen, *wie* viele Hammel er hütet. Zwar kann er nun materialgebunden zählen und kann mit der Anzahl seiner Hammel auch losgelöst von der Betrachtung der Herde hantieren, hat also Möglichkeiten des Umgangs mit einer konkreten unnatürlichen Vielzahl gefunden. Dennoch hat er keine Mittel sie kognitiv zu erfassen, da seine Zahldarstellung selbst wiederum eine (nun abstraktere) unnatürliche Vielzahl ist.

Doch vor der Darstellung dieses nächsten Problems und seiner Lösungen[5] seien nachstehend einige tatsächliche Beispiele der oben am fiktiven Beispiel dargestellten Entwicklung aufgeführt.

So wurden in Westeuropa gekerbte Knochen gefunden, deren Alter auf 20.000 bis 30.000 Jahre geschätzt wurde und die als Zahldarstellungen interpretiert wurden (vgl. Ifrah 1991, 110). Auch sind aus zahlreichen Kulturen, etwa der der Ägypter, Azteken, Römern, Inder, Maya, Griechen oder Chinesen verschiedene Zahldarstellungen mit Fingern oder Zehen überliefert (vgl. ebd., 49ff.; 79ff.). Oft wurden Soldaten mittels Kieselsteinen gezählt – bevor man in den Krieg zog, legte jeder Soldat einen Stein auf einen Haufen. Als die Schlacht beendet war, entfernte jeder Überlebende einen Stein – die Differenz zeigte die Anzahl gestorbener Menschen an (vgl. ebd., 118). Auch in den Ursprüngen der chinesischen (vgl. Ifrah 1991, 390ff.) und der römischen (vgl. ebd., 163ff.) Zahlschrift ist der Gedanke einer *kardinalen Zahldarstellung* enthalten: Eine Drei wurde in diesen Zahldarstellungen eben durch *drei* Einzelelemente – III – dargestellt. Eine kardinale Zahldarstellung zeigt also zugleich alle Elemente (zum Beispiel neun: IIIIIIIII) auf, die die Zahl konstituieren.

Zur Erläuterung der Lösung des *zweiten Problems der visuellen Erfassung abstrakter unnatürlicher Vielzahlen* bietet es sich an, erneut auf die Geschichte des fiktiven Hirten einzugehen. Die kardinale Zahldarstellung der 55 des Hirten hat folgende Form:

[5] Obschon dieses Problem in letzter Konsequenz vermutlich immer bestehen wird. Die Erfassung großer Zahlen wird aufgrund der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen die kognitiven Möglichkeiten der Menschen wohl stets übersteigen. Als Beispiel sei die natürliche Zahl Googol (nach deutscher Systematik: zehn Sexdezilliarden) angeführt. Diese Zahl ist die hundertste Potenz von Zehn (10^{100}) und nimmt in unserer dezimalen Stellenwertsystemdarstellung folgende Form an: 10000000000

IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII

Da er diese unnatürliche Vielzahl nicht erfassen kann, kommt er auf die Idee, jeweils nur vier gleichzeitig wahrnehmbare Kerben (Zeichen) darzustellen und dann sein Verfahren zu variieren[6]. Deswegen stellt er jede fünfte Kerbe durch zwei schräge Kerben dar, um die abstrakte unnatürliche Vielzahl zu strukturieren:

IIII V IIII V IIII V IIII V IIII V IIII V IIII V IIII V IIII V IIII V IIII V

Allerdings ist auch diese Strukturierung für neurotypische Personen visuell und ohne den Einsatz weiterer Mittel nicht zu erfassen, da auch die Anzahl der neuen Zeichen eine unnatürliche Vielzahl ist. Also ersetzt er auch hier jede vierte Doppelkerbe durch eine Doppelkerbe anderer Art, etwa durch ein Kreuz:

IIII V IIII V IIII V IIII V IIII X IIII V IIII V IIII V IIII V IIII X IIII V

Durch diese *Bündelung* mehrerer Elemente zu einem neuen Element wird die Menge für den Hirten übersichtlicher, da er nun auf einen Blick sehen kann, dass seine Herde zwei Kreuze (XX), und eine schräge Doppelkerbe (V) umfasst. Diese Darstellung erinnert im Übrigen nicht zufällig an die römischen Ziffern. Es wird sogar vermutet, dass diese aufgrund der eingeschränkten grafischen Gestaltungsmöglichkeiten beim Erzeugen von Kerben in Material in viele Kulturen auf ähnliche Weise entstanden (vgl. Ifrah 1991, 172ff.).

Dieses Prinzip der Bündelung als Loslösung von der erschwerten Wahrnehmung und der schwierigen Handhabbarkeit unnatürlicher Vielzahlen wurde in der Phylogenese des Menschen in nahezu allen elaborierten Zahldarstellungen genutzt. Die römische Zahlschrift nutzte die Bündelung ebenso wie die Zahlschrift der Sumerer (vgl. ebd., 210ff.), der Ägypter (vgl. ebd., 232f.), der Azteken (vgl. ebd., 251), der Chinesen (vgl. ebd., 383) oder der Maya (vgl. ebd., 463; vgl. Kaplan 2005, 92ff.). Die Inka stellten etwa in ihren Archiven Zahlen durch Knoten dar, wobei jeweils ein Bündel von Knoten zusammengefasst wurde und nur durch einen Knoten an anderer Stelle oder durch einen andersartigen Knoten dargestellt wurde (vgl. Ifrah 1991, 121ff.).

[6] Noch heute nutzen Menschen dieses Mittel, etwa zur leichter erfassbaren Darstellung der 22-stelligen deutschen IBAN-Nummer: DE489668273882651206 48 vs. DE48 9668 2738 8265 1206 48.

Teilweise hatte die Bündelung aber nicht allein den Vorteil der Übersichtlichkeit. So wurden beispielsweise im heutigen Irak Tongegenstände unterschiedlicher Form gefunden, die auf die Zeit 3300 v. Chr. datiert wurden und zur Darstellung von Zahlen sowie zum Rechnen benutzt wurden – darunter Kugeln, Kegel, Stäbe oder Scheiben (vgl. Ifrah 1991, 115). Der revolutionäre Aspekt solchen Bündelungen war, dass nun zur Repräsentation einer großen Menge nicht mehr gleich viele Kieselsteine benötigt wurde – Gruppen von Einzelgegenständen (etwa Kieselsteine) können durch Bündelung mit nur einem einzigen andersartigen Gegenstand ersetzt werden, sodass weniger Steine benötigt werden. Dieses Vorgehen ermöglichte also erstmals eine Verkürzung das Zahldarstellung.

Wo im Falle der kardinalen Darstellung mit Bündelung der Zahl 13 (IIII V IIII V III) trotz Bündelung noch 13 einzelne Zeichen verwendet wurden, was den kardinalen Aspekt der Zahldarstellung ausmacht, wurde durch den Ersatz von je fünf Einzelsteinen durch einen größeren Stein die Zahl 13 nicht mehr durch 13 Steine (ooooooooooooo) sondern nur durch fünf Steine (O O ooo) repräsentiert, womit durch die Bündelung eine weitere Abstraktion von einer tatsächlichen Menge vollzogen wurde. Diese Darstellung ist in Teilen noch kardinal (da ja drei kleine Steine auch tatsächlich für die Zahl Drei stehen), sie ist durch die Bündelung und den Ersatz eines Bündels durch nur einen qualitativ anderen Repräsentanten jedoch zugleich *ordinal*. Auf diesen ordinalen Aspekt wird im Folgenden im Kontext des dritten Problems eingegangen.

Die abstrakte unnatürliche Vielzahl wurde also durch die Bündelung überformt, es wurde nicht mehr jedes Element einer Menge gleichartig dargestellt.

Diese Darstellung löst allerdings noch nicht das *dritte Problem der kognitiven Erfassung abstrakter unnatürlicher Vielzahlen* auf, wie an folgender erfundener, aber nicht weniger logische Strukturierung zu zeigen ist, wenn wir versuchen herauszufinden aus wie vielen Einzelsymbolen diese kardinale Zahldarstellung[7] besteht :

….?….§….?….§….?….§….?….§….?….%….?….§….?….§…

Versuchen wir diese unkonventionalisierte Zahldarstellung kognitiv zu erfassen, so wenden wir unweigerlich das Mittel des Zählens an. Die Bündelung hilft zwar, die Menge visuell besser

[7] In der vorhergehend beschriebenen kardinalen und ordinalen Zahldarstellung durch Ersetzung der Bündel würde diese Zahl der Systematik entsprechend durch %§§… dargestellt werden.

wahrnehmen zu können, zur kognitiven Erfassung dieser Menge genügt dies aber nicht. Wir bringen die Anzahlen daher in eine uns vertraute, immer gleichbleibende Anordnung, auf die wir diese strukturierte Menge beziehen – dies ist die Folge der natürlichen Zahlen – und ermitteln so, dass eine Menge der Mächtigkeit 73 dargestellt ist[8]. Dahinter steht der Gedanke, dass durch den Aufbau der natürlichen Zahlen jeder Zahl ein genau definierter Platz in einer Rangfolge aller natürlichen Zahlen zugeordnet werden kann, die diese Zahl eindeutig von anderen Zahlen unterscheidet. Dieser *Ordinalzahlaspekt* ist es, der es ermöglicht, kognitiv zu repräsentieren, ‚wie viele' Elemente eine Menge hat, da erst dadurch jede Zahl einen Namen hat (vgl. auch bzgl. der Kindesentwicklung Gerster & Schultz 2004, 82ff.; vgl. Fuson et al. 1997, 140ff.). „Demnach stellten verbale Zählsequenzen die Werkzeuge dar, um externe Mengen auf geistige Größen abzubilden" (Fromme 2017, 49).

Vor der mathematischen Erklärung des Aspekts der Ordinalzahl und des dahinterliegenden mathematischen Prinzips der Rekursion sei eine historisch begründete Vermutung der Entstehung erster Zahlrangfolgen dargestellt.

Als Beispiel für eine solche vermutete Entwicklung dienen verschiedene Völker Ozeaniens. Diese zählten (und zählen) mit dem eigenen Körper, wobei es eine konventionalisierte Eins-zu-Eins-Zuordnung gab. So wurden etwa für die Zahlen Eins bis Fünf die Finger der rechten Hand, für die Sechs das rechte Handgelenk, für die Sieben der rechte Ellenbogen, für die Acht die rechte Schulter und für die Neun das Brustbein verwendet (vgl. Ifrah 1991, 30). Dann wurde das Schema auf der linken Körperhälfte wiederholt (vgl. ebd.). Für Zahlen > 17 wurde die Systematik auf die Hüfte, Beine und Zehen übertragen, sodass zum Beispiel die Insulaner der Torres-Straße bis 33 zählen konnten (vgl. ebd.). Auch viele andere Völker zählten in vergleichbarer Weise mit ihrem Körper (vgl. ebd., 79ff.). Besonders an diesem Verfahren ist, dass man durch die Angabe nur eines Körperteils, etwa der rechten Hüfte, eine Ordinalzahl, also eine Reihenfolgenzahl angeben kann – die Zahl ‚rechte Hüfte' steht daher immer und ausschließlich für die Zahl, die ich im Zuge einer Eins-zu-Eins-Zuordnung an siebzehnter Stelle berühre, also für die Zahl 17 (vgl. ebd., 30ff.). So kann mit einer einzigen Angabe eine Anzahl wiedergegeben werden, die aus vielen Einzelelementen besteht. Es besteht also zurecht die Vermutung, „daß die

[8] In der römischen Zahldarstellung, der dieses Beispiel bzgl. der Bündelung entspricht (es werden immer jeweils fünf, dann zwei Elemente gebündelt), würde die 73 ähnlich dargestellt werden, nämlich durch eine Mischung ordinaler und kardinaler Darstellungen: %§§… = LXXIII da % = L und § = X und ? = V und . = I

Zahlworte direkt auf diese körperbezogene Zeichensprache zurückgehen, die heutigen Zahlenworte also in grauer Vorzeit Namen für die Körperteile waren, mit denen die jeweilige Zahl gezeigt wurde“ (ebd., 38).

Dieses Prinzip der Ordinalzahl ermöglicht also durch das Rückführen auf eine festgelegte Zahlreihenfolge (heutzutage repräsentiert durch die jeweiligen Zahlzeichen und die dazugehörigen Zahlwörter) und löst damit die Notwendigkeit ab Zahlen in kardinaler Form zu repräsentieren, was sehr aufwendig sein kann. In der Zahl 132 sind aufgrund der ordinalen Zahleigenschaften auch die Mengen 131, 130, 129, … enthalten ohne, dass für die Angabe der Menge der gesamte Zählprozess 1, 2, 3, … , 131, 132 dargestellt werden muss. Deswegen wird die (auch sprachliche) Zahldarstellung durch die Verwendung der Ordinalzahl abstrakter als durch die Verwendung kardinaler Darstellungen.

Dieser Ordinalzahlaspekt kann aufgrund der angesprochenen Zahleigenschaften, der Rekursion, also der Bezugnahme einer Zahl auf ihre Vorgängerin, wirksam werden. So beschreibt auch der italienische Mathematiker Giuseppe Peano in den bekannten Peano-Axiomen die grundlegende Struktur der natürlichen Zahlen durch das Prinzip der Rekursion (vgl. Halmos 1994, 63ff.). Eine rekursive Definition kann zum Beispiel so erfolgen:

Annahme I: Die Zahl Eins ist eine natürliche Zahl[9].

Annahme II: Ist n eine natürliche Zahl, dann ist n + 1 ebenfalls eine natürliche Zahl.

Mit diesen beiden Annahmen können nun alle natürlichen Zahlen rekursiv bestimmt werden. So ist 1 nach Annahme I eine natürliche Zahl. 1 + 1 = 2 muss demnach auch eine natürliche Zahl sein (Annahme II). Da 2 eine natürliche Zahl ist, ist auch 2 + 1 = 3 eine natürliche Zahl (Annahme II). Mit dieser rekursiven Definition lässt sich demnach jede natürliche Zahl > 1 auf ihre einzelnen Elemente zurückführen, da 4 = 3 + 1 = (2 + 1) + 1 = ((1 + 1) + 1) + 1 ist.

An dieser Stelle sei der dargestellte Stand der verfügbaren Mittel zum Umgang mit Zahlen kurz zusammengefasst. Um eine Ablösung von einer nicht un-mittel-bar wahrnehmbaren Vielzahl zu erreichen, wurde eine Eins-zu-Eins-Zuordnung vorgenommen und eine abstrakte kardinale Zahldarstellung (auch: additive Zahldarstellung) als Hilfsmenge erzeugt. Diese kann mithilfe

[9] Im Zuge der Peano-Axiome wird bereits die Null als natürliche Zahl definiert.

des Prinzips der Bündelung visuell leichter erfasst werden. Durch eine feste Rangfolge der Zahlen kann jede Zahl individuell benannt werden, wobei gleichzeitig ihre Stellung in der Rangfolge und ihre Beziehung zu anderen Zahlen deutlich wird (Ordinalzahl). Die römisch dargestellte Zahl Fünf ist demnach als V eine ordinal dargestellte Zahl und als IIIII eine kardinal dargestellte Zahl. Die Sieben kann in römischer Zahlschreibweise kardinal (IIIIIII) oder als Mischung aus kardinaler und ordinaler Darstellung realisiert werden (VII). [10]

Zudem wird durch diese Innovationen ein abstrakter Zahlbegriff konstituiert, der durch die Möglichkeit des Abzählens und damit des wiederholten Vergewisserns eine elaboriertere Zahlvorstellung ermöglichte. Somit sind erste Mittel der Ablösung von konkreten Zahlen und von unnatürlichen Vielzahlen dargestellt. Allerdings ergaben sich nun erneute Problematiken, die mit den bisherigen Mitteln und Abstraktionen nicht aufzulösen waren.

Eine Schwierigkeit, die mit den bisher herausgearbeiteten Zahldarstellungen einhergeht, ist die Darstellung größerer Zahlen. Betrachten wir dazu die römische Zahlschreibweise, welche eine Mischform kardinaler und ordinaler Darstellung ist. Die Darstellung der Zahl 5367 würde nach folgendem Prinzip erfolgen. 4867 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1 also MMMMDCCCLXVII. Die Verwendung der nur sieben klassischen Ziffern des römischen Systems der Antike (I, V, X, L, C, D, M) wird allerdings erschwert, wenn größere Zahlen dargestellt werden sollen. So ist die Darstellung der Zahl 44867 im Unterschied zur Darstellung der Zahl 4867 deutlich umfangreicher: 44867 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 +

Da eine solche Zahldarstellung nur schwer handhabbar ist, müssten also der Systemlogik folgend stets neue Zahlzeichen erfunden werden. Da die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist, würden auch unendlich viele Zahlzeichen benötigt.

Wie wurde also dieses *vierte Problem der Notwendigkeit unendlich vieler Zahlzeichen* gelöst?

Die Römer erfanden zunächst tatsächlich neue häufig Zeichen für die Bündelungen von 5.000, 10.000, 50.000 und 100.000 (vgl. Ifrah 1991, 355f.). Allerdings gab es „bald so viele Regeln, daß dem lateinischen System jeder Zusammenhang fehlte“ (Ifrah 1991, 355). Dennoch kann die Zahl 44867 etwa mit dem Symbol für das Bündel 10.000 (CCIↃↃ) nun verkürzt dargestellt werden: CCIↃↃCCIↃↃCCIↃↃCCIↃↃMMMMDCCCLXVII.

Eine noch ökonomischere Zahldarstellung wurde durch eine weitere und bis heute tragende Innovation ermöglicht. Durch einen Überstrich über eine Zahl oder einen Teil einer Zahl wurde signalisiert, dass diese mit 1000 zu multiplizieren war (vgl. ebd., 358f.).

Mit der Einführung dieses *multiplikativen Prinzips* konnte die Zahl 44867 = $1000 \cdot (10 + 10 + 10 + 10) + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1$ als $\overline{\text{XXXX}}$MMMMDCCCLXVII dargestellt werden. Allerdings verschob die Anwendung des multiplikativen Prinzips auf das bisherige römische Darstellungssystem (welches, wie in der obigen Darstellung nun mit dem additiven Prinzip kombiniert ein gemischtes System der Zahldarstellung erzeugt) die Problematik nur auf eine andere Ebene. Denn der Systemlogik der römischen Bündelung (alternierende Bündelung von fünf und zwei Elementen) folgend werden für Zahlen > 4.999.999 wieder neue Symbole gebraucht (da 5.000.000 = $1000 \cdot 5000 = 1000 \cdot (1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000) = \overline{\text{MMMMM}}$). Dennoch zeigt die Einführung des multiplikativen Prinzips und die daraus erwachsene *hybride Zahldarstellung* (vgl. ebd., 400ff.) bereits den Beginn einer endgültigen Lösung dieses vierten Problems an, worauf noch einzugehen sein wird. Hybride Systeme verfügen immer über eine *Basis* mit ihren jeweiligen Potenzen, die zur Multiplikation mit Ziffern der unteren Ordnungen genutzt werden. Um dies zu explizieren, sei etwa das assyrisch-babylonische hybride System angeführt. Dieses hat die Basis 10 (vgl. ebd., 396ff.) – eine Basis, die Menschen sehr häufig wählten, da sie die zehn Finger der Hände wohl

natürlicherweise als Hilfsmenge nutzten[11] (vgl. ebd., 49). In der assyrisch-babylonischen Schrift wurden dann die Potenzen der Basis 10, also $10^0 = 1\,;\ 10^1 = 10\,;\ 10^2 = 100\,;\ 10^3 = 1000\,;\ 10^4 = 10.000$ genutzt, um die Zahlen mithilfe des multiplikativen Prinzips darzustellen (vgl. ebd., 396f.). Die Zahl 2432 wurde demnach nach folgender Systematik, wohl aber mit Symbolen der Keilschrift dargestellt:

$$\text{II} \cdot 10^3 + \text{IIII} \cdot 10^2 + \text{III} \cdot 10^1 + \text{II} \cdot 10^0$$

Auch in anderen Kulturkreisen wurden solche hybriden Zahldarstellungen unter Zuhilfenahme des multiplikativen Prinzips – wenn auch teilweise mit inkonsistenten Aspekten – entwickelt. So multiplizierten die Griechen ihre Ziffern mit dem Faktor 5 um neben den Ziffern für die Werte 10, 100, 1000 und 10.000 auch die Werte 50, 500, 5000 und 50.000 darstellen zu können, was eine Reduktion der zu schreibenden Zahlzeichen nach sich zog (vgl. ebd., 362).

Auch die Ägypter führten ihr additives Zahldarstellungssystem in Hieroglyphen in ein hybrides System über (vgl. ebd., 363f.), ebenso wurden in Regionen Indiens und auf Kreta Spuren hybrider Systeme gefunden (vgl. ebd. 363). Die Chinesen, Phönizier, Äthiopier oder Singhalesen verfügten ebenso über hybride Zahldarstellungen (vgl. ebd., 400f.).

Auch hier wirkt es so als ließe sich die eingangs aufgestellte Hypothese bestätigen – die Entwicklung des Mittels hybrider Zahldarstellungen scheint der Versuch der Begegnung einer Problematik zu sein, die viele Kulturen gleichermaßen wahrgenommen haben könnten. Es scheint ähnlich einer konvergenten Evolution von Lebewesen – Hai und Delphin gleichen sich in vielen Merkmalen ohne nah verwandt zu sein – eine allgemeine Neigung zur Entwicklung hybrider Systeme zu geben.

Bevor nun die tatsächliche Lösung des vierten Problems – auch hybride Ziffernsysteme lösen die Notwendigkeit, stets neue Ziffern erfinden zu müssen, nicht auf[12] – ausführlich dargestellt wird, sei auf ein weiteres Problem eingegangen, das durch die angesprochene Lösung ebenfalls

[11] Die Maya nutzten dagegen die 20 als Basis. Dies ist nicht verwunderlich, da „alle mittelamerikanischen Völker […] nicht nur ihre Finger, sondern auch ihre zehn Zehen zum Zählen“ (Ifrah 1991, 450) nutzten.

[12] Anders als im Falle der Alltagsmathematik gab es im Bereich der Astronomie und Mathematik bereits früh Bestrebungen, mit sehr großen Zahlen umgehen zu können. So rechneten beispielsweise die Astronomen der Maya in ihrer Zeitrechnung mit Zahlen > 20.000.000.000 (vgl. Ifrah 1991, 460; vgl. Kaplan 2005, 92ff.).

hinfällig wurde. Denn alle bisher beschriebenen Zahldarstellungen (rein additive Zahldarstellungen, sowohl kardinal als auch ordinal-kardinal sowie hybride Zahldarstellungen) bereiteten ihren Verwenderinnen und Verwendern einige Schwierigkeiten im Umgang. Um diese Schwierigkeiten nachvollziehen zu können, sei ein Beispiel an einem fiktiven gemischten System aufgeführt. Als Grundeinheit dient das Symbol I, das an eine Kerbe erinnert. Nun wird nach folgender Systematik vorgegangen: IIIII = $ und $$$$$ = # sowie (Faktor · Faktor) als Multiplikationssymbol.

Allein die Umwandlung der gemischt dargestellten Zahl ($ · ##)$$IIII in eine rein additive Zahldarstellung gleicher Systematik bedarf genauen Nachdenkens:

($ · ##) $$ IIII = ##########$$IIII

Doch wie kann eine Divisionsaufgabe wie etwa ($ · ##)$$IIII : III unter Verwendung dieser fiktiven Zahldarstellung gelöst werden? Wie kann mit einem additiven oder hybriden System gerechnet werden?

Ohne diese Aufgabe in unser heutiges System der Zahldarstellung zu übertragen, kann mithilfe folgender Methode gerechnet werden. Zuerst wird eine Tabelle erstellt, in der jeder Bündelungseinheit eine eigene Spalte zuordnet wird.

#	$	I

Nun stellen wir in stilisierten Steinchen[13] die Anzahl an dargestellten Symbolen des Dividenden ($ · ##) $$ IIII dar, wozu, wie oben bereits durchgeführt, eine Umwandlung der hybriden in eine additive Darstellung notwendig ist:

#	$	I
($ · ●●) = ●●●●●●●●●●	●●	●●●●

[13] Die Römer nannten einen solchen kleinen Kieselstein ‚calculus', worauf das Wort ‚Kalkül' zurückgeht (vgl. Ifrah 1991, 15).

Jetzt teilen wir die Steine jeder Spalte durch den Divisor III, beginnend mit der ersten:

#	$	I
●●● ●●● ●●● ●	●●	●●●●

Wir erhalten den Rest ●. Damit wir die erste Spalte bereinigen können und durch III teilen können, tauschen wir den Stein mit der Wertigkeit # in Steine der Wertigkeit $ um ($$$$$ = #) und erhalten als Ergebnis der Division in der ersten Spalte die Anzahl ●●●:

#	$	I
●●●	●●●●● ●●	●●●●

Nun wiederholen wir den Vorgang in der mittleren Spalte:

#	$	I
●●●	●● ●● ●● ●	●●●●

Auch hier erhalten wir den Rest ●, tauschen wiederum in Steine der Wertigkeit I um (IIIII = $) und erhalten als Divisionsergebnis die Anzahl ●●:

#	$	I
●●●	●●	●●●●● ●●●●

Nun teilen wir auch die Steine der letzten Spalte durch III[14]:

#	$	I
●●●	●●	●●● ●●● ●●●

[14] Dieser Vorgang kann mittels Eins-zu-Eins-Zuordnung vorgenommen werden, was der Grundvorstellung des Verteilens bzgl. der Division entspricht.

Wir können nun – da kein Rest vorhanden ist – das Ergebnis darstellen:

#	$	I
●●●	●●	●●●

Auf die fiktive Zahldarstellung übertragen, können wir jetzt eine korrekte Gleichung notieren. Dazu schreiben wir mittels Eins-zu-Eins-Zuordnung jeweils so viele Symbole, wie Steine in der entsprechenden Spalte liegen: ($ · ##)$$IIII : III = ###$$III

Somit wurde die Aufgabe in der Logik und nur mit Mitteln des hybriden Systems erfolgreich gelöst. Damit wurde eine über Jahrhunderte benutzte Lösung des *fünften Problems des Rechnens* dargestellt. Ähnliche Verfahren wurden in der Geschichte des Rechnens kulturübergreifend genutzt.

So wurde in der Antike zum Rechnen das obige Prinzip mithilfe einer Münztafel umgesetzt – diese war wie die dargestellte Tabelle aufgebaut; gerechnet wurde ebenfalls mit Steinen oder Rechenpfennigen (vgl. Ifrah 1991, 136f.). Die Römer nutzten das gleiche Prinzip ebenfalls auf einem Abakus, auf welchem auf Stangen befestigte Steinchen bewegt werden konnten (vgl. ebd.) – sie nutzen diese Rechenhilfe sogar als tragbaren Taschenrechner (vgl. ebd., 142f.). Auch die Griechen nutzten Rechentafeln nach diesem Prinzip (vgl. ebd., 139).

Sogar im 16. Jahrhundert wurden in Deutschland noch Rechentafeln verwandt (vgl. ebd., 145). Darüber hinaus nutzen die Chinesen des 2. Jahrhunderts v. Chr. – und vermutlich bereits weit davor (vgl. ebd., 148) – ein System gleichen Prinzips auf einem Schachbrett. Die Chinesen nutzten ebenfalls ein sog. Kugelbrett, das dem Abakus glich (vgl. ebd., 152ff.).

Doch wie an der gleichen Divisionsaufgabe in heutiger Zahldarstellung ersichtlich ist, waren konkreten Rechenverfahren wie das Rechnen mit dem Abakus ebenfalls problembehaftet. Die Aufgabe 264 : 3, die aus den exakt gleichen, allerdings anders strukturierten und dargestellten natürlichen Zahlen besteht (264 = ($ · ##)$$IIII), kann mit unserem schriftlichen Rechenverfahren nicht nur sehr schnell und platzsparend auf Papier ausgerechnet werden. Gleichzeitig ist der Rechenweg ebenfalls nachvollziehbar:

```
 264 : 3 = 88
-24
  24
 -24
   0
```

Die Schwierigkeiten, dass „beim kleinsten Fehler die gesamte Rechnung wiederholt werden“ (ebd., 159) musste und die Tatsache, dass konkrete Rechenverfahren teilweise unpraktisch zu handhaben waren (vgl. ebd.), führte wohl letztlich zur Verdrängung dieser Verfahren. Das heute weltweit genutzte Zahldarstellungs- und -strukturierungssystem entwickelte sich also vermutlich hauptsächlich aufgrund der beiden Probleme der Darstellung großer Zahlen und des Rechnens.

Doch welche Schritte waren notwendig, um ausgehend von hybriden Systemen *Stellenwertsysteme* (auch: Positionssysteme) zu entwickeln? Auch diese Entwicklung fand im Laufe der Geschichte erstaunlich häufig statt – fast scheint es so als entspräche die „Entwicklung […] hin zu einem Positionssystem […] der allgemeinen Tendenz hybrider Ziffernsysteme“ (ebd., 469).

Dazu sei darauf hingewiesen, dass durch die Einführung des multiplikativen Prinzips einzelne Ziffern in Kombination mit anderen Ziffern eine andere Bedeutung hatten, einen anderen Wert annahmen. Dies wird anhand des auf einer Basis aufbauenden dargestellten konkreten Rechenverfahrens besonders deutlich, da hier optisch gleiche Münzen oder Steine einen anderen Wert annehmen, je nachdem in welcher Spalte diese liegen. In dieser Tatsache ist die „Überlegenheit und Genialität unseres Ziffernsystems“ (ebd., 411) zu sehen. Durch die Idee, dass die Position einer Ziffer die Multiplikation mit einer Basenpotenz bestimmt, dass also eine Ziffer entsprechend ihrer Stelle einen anderen Wert annimmt und so jede Stelle einen Stellen-Wert hat, konnte letztlich nicht nur das vierte Problem der Darstellung unendlicher Zahlen mit endlichen Ziffern gelöst werden. Ebenso wurde das fünfte Problem des Rechnens gelöst, da nun direkt mithilfe der Zahldarstellung entsprechend dem vorhergehend beschriebenen Prinzip gerechnet werden konnte – Zahldarstellung und Zahlberechnung wurden so erstmals vereint.

Auch diese Innovation gelang historisch mehrfach. So nutzen babylonische Gelehrte bereits vor der westlichen Zeitrechnung Stellenwertsysteme mit begrenzten Symbolen (vgl. ebd., 412ff.).

Die Griechen übernahmen dieses Vorgehen, nutzten allerdings statt der babylonischen Ziffern in Keilschrift ihre eigenen Ziffern (vgl. ebd., 424).

Wie am Beispiel des Rechenbretts dargestellt, ist es egal, welche Ziffernsysteme für die Verwendung von Stellenwertsystemen genutzt werden, solange jede Ziffer für eine feste Anzahl steht (die dann wiederum durch Multiplikation mit den Potenzen einer beliebigen Basis vervielfacht wird). Die Beliebigkeit dieser Ziffern erkennt man an unseren heutigen ordinalen Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, welche von jeder konkreten Zahlvorstellung losgelöst sind. Diese Ziffern sind indisch-arabischen Ursprungs und wurden in der Geschichte wohl aufgrund von Verkürzungen beim Schreiben in ihrer äußeren Form mehrfach deutlich verändert (vgl. ebd., 528ff.).

Außer den Babyloniern und Griechen nutzten die Chinesen etwa zu Beginn unserer Zeitrechnung ein eigenes Stellenwertsystem mit ihren eigenen Ziffern (vgl. ebd., 428ff.; 549). Auch die Astronomen und Mathematiker der Maya erfanden vermutlich unabhängig eine vergleichbare Zahldarstellung (vgl. ebd., 438ff.; 469). Auch indischen Gelehrten gelang wohl die unabhängige Erfindung eines Stellenwertsystems (vgl. ebd., 480f.). Dieses Stellenwertsystem gelangte daraufhin über arabische Länder nach Europa und ist verbunden mit den indisch-arabischen Ziffern die Grundlage unseres heutigen Systems (vgl. ebd.). Dieses dezimale Stellenwertsystem existiert seit etwa 1500 Jahren (vgl. ebd., 486).

Allerdings ist zuvor noch ein Problem zu lösen gewesen, welches ebenso von allen Kulturen, die Stellenwertsysteme nutzten, wahrgenommen werden musste. Um uns das *sechste Problem der Zahldarstellung freier Potenzen* zu vergegenwärtigen, sei zuerst ein Beispiel angeführt. Dazu wählen wir ein System zur Basis zehn und eine kardinale Zifferndarstellung. Da bei zehn Einheiten gebündelt wird, müssen für jede Potenz von zehn Ziffern bis neun bereit stehen: I, II, III, IIII, IIII I, IIII II, IIII III, IIII IIII, IIII IIII I.

Stellen wir etwa die Zahl 20040 mittels einer Stellenwerttabelle dar, so nimmt die Zahl diese Form an:

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
II			IIII	

Die Zahl ist so eindeutig dargestellt. Allerdings ist eine solch eindeutige Darstellung mit den obigen Ziffern nur möglich, wenn klar ist, dass die Potenzen $10^3, 10^2$ und 10^0 nicht besetzt sind. Sollen die Zahlen in einer ökonomisch sinnvollen Form ohne Raster geschrieben werden, so ist nicht klar, wie viele Potenzen frei sind, selbst wenn durch Freiräume versucht wird zu signalisieren, welche Potenzen gemeint sind. Im Fall der Zahlen 24 und 204 ist die Darstellung durch die Benutzung eines Freiraums noch recht deutlich, obwohl auch hier Unsicherheiten bestehen: II IIII vs. II IIII.

Jedoch kann schon hier nicht gesagt werden, ob es sich im Falle der ersten Zahl um eine 240 oder 2400 und im Falle der zweiten Zahl um eine 204, eine 2004, eine 2040 oder eine 20040 handelt. Die Notwendigkeit eines Platzhalters, der das Nichts ausdrückt, ist offensichtlich. Allerdings machte wohl erst dieses Problem ein solches Zeichen notwendig, schließlich beginnt der Zählvorgang bei der Benennung der ersten Einheit *Eins* und nicht bei der Feststellung, dass vor dem Zählen nichts vorhanden ist, oder dass noch nicht ein Element gezählt wurde – dies wäre für das Zählen redundant.

Doch scheint die Entdeckung der Null trotz des aus heutiger Sicht einfachen Konzepts keine einfache Leistung gewesen zu sein. Das zeigt sich daran, dass die Null in der Geschichte der Zahlschrift nur dreimal[15] erfunden wurde – durch die Babylonier, die Maya und die Inder (vgl. Ifrah 481). Allerdings lagen dabei, wie am vorhergehenden Beispiel des Positionsprinzips dargestellt, wohl die gleichen Problematiken zugrunde (vgl. ebd., 416ff.; 431; 472ff.).

Mit der Erfindung der Null wurde unsere heutige Zahldarstellung vollendet. Nun konnte jeder Zahl mit begrenzten Mitteln eine eindeutige Darstellung zugeordnet werden, wobei zugleich diese Darstellung als Rechenmittel diente. Obgleich die Vorteile dieses Systems überwiegen, wurde in Europa lange versucht den Status quo und das Herrschaftswissen unter Verwendung der römischen Zahlschreibweise und komplizierterer Rechenmethoden zu wahren – allerdings wurden die Vorteile so groß, dass das dezimale Stellenwertsystem bereits im 12. Jahrhundert genutzt wurde und spätestens ab dem 15. Jahrhundert weit verbreitet war (vgl. ebd., 553f.). Nach heutigen Standards können Stellenwertsysteme wie folgt definiert werden:

[15] Die Chinesen erfanden die Null nicht selbstständig, sondern übernahmen die indische Null (vgl. Ifrah 1991, 431ff.)

Seien $b, k, z \in \mathbb{N}$ und $b > 1$ und $0 \leq z_i < b$ mit $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Dann ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig darstellbar durch

$$n = z_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + z_1 \cdot b^1 + z_0$$

(vgl. Beutelspacher 2018, 61; vgl. Hefendehl-Hebeker & Schwank 2015, 97).

Dabei ist b die Basis des Stellenwertsystems, b^i der jeweilige Stellenwert sowie z_i der jeweilige Ziffernwert.

Damit ist das heutige Abstraktionsniveau der Zahldarstellungsweise des Stellenwertsystems beschrieben. Auf der folgenden Seite sind nun die wesentlichen Erkenntnisse des Weges der Problemlösung in einer Grafik dargestellt. Dabei ist nicht der historisch exakte Weg dargestellt. Vielmehr ist der Weg der Entwicklung des Stellenwertsystems anhand der inneren Logik, ihrer Zusammenhänge und anhand der wesentlichen Mittel und Abstraktionen verdeutlicht.

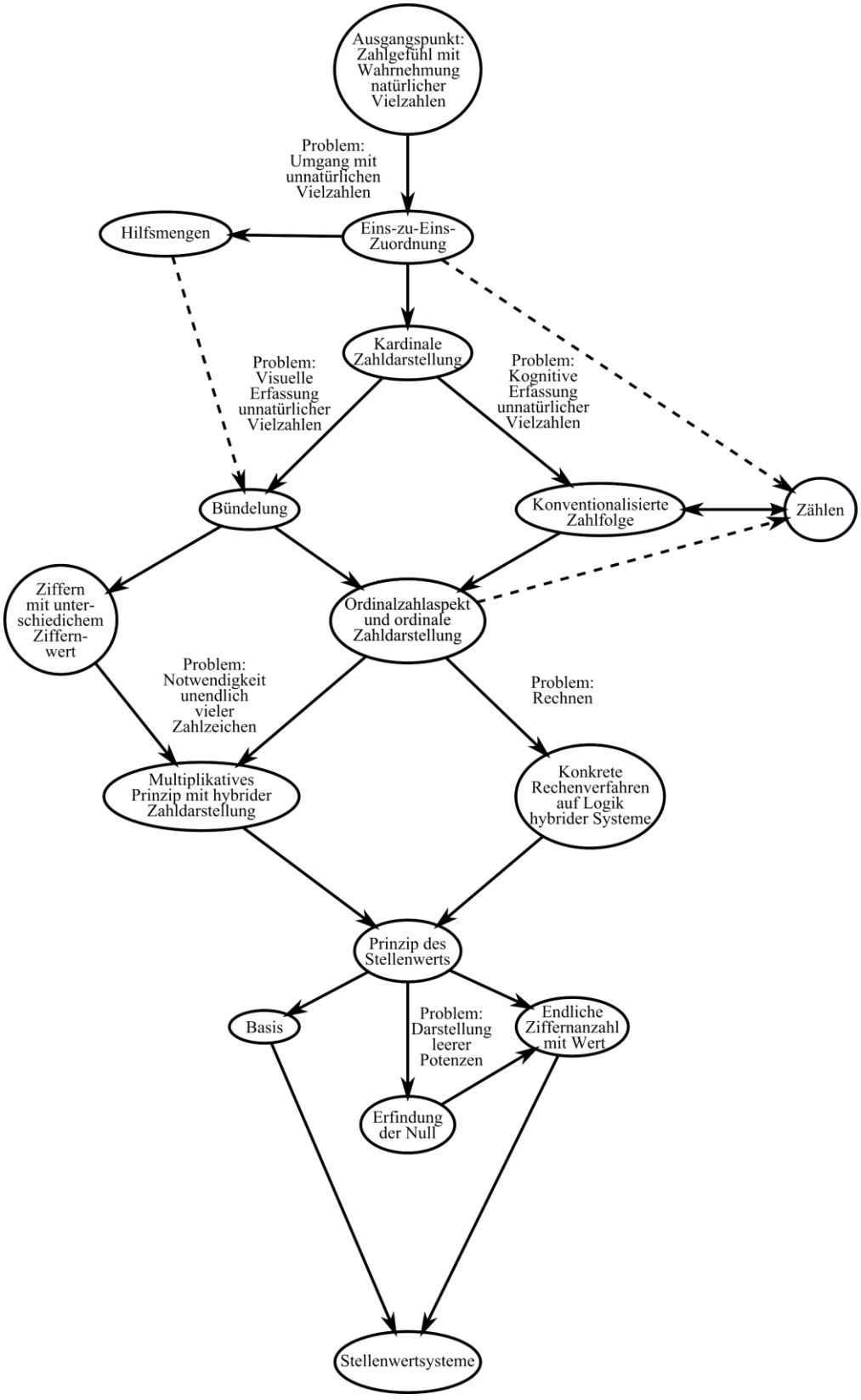

Abb. 5: Darstellung wesentlicher in das Stellenwertsystem eingegangenen Abstraktionen

Abschließend seien einige Meilensteile der Zahlentwicklung chronologisch aufgeführt. Zwar kann nicht *eine* Entwicklung der Zahl beschrieben werden, allerdings traten die Abstraktionsstufen in der Chronologie auf, die auch ihrer inneren Logik entsprechen. Dabei wurden in der Region Mesopotamiens viele Innovationen sehr früh erreicht, weshalb die dort lebenden Völker bedeutsame Meilensteine der Zahlentwicklung zuerst erreichten:

Vermuteter Zeitraum des Auftretens	*Meilenstein der Zahlentwicklung*
30.000 – 20.000 v. Chr.	Knochen mit Kerben: • Eins-zu-Eins-Zuordnung und Erzeugung einer Hilfsmenge • Kardinale Zahldarstellung
3300 – 2850 v. Chr.	Erste Ziffern (Ägypter, Sumerer, Elamiter): • Bündelung • Ordinale Zahldarstellung
3000 v. Chr.	Auftreten des multiplikativen Prinzips in der Zahlschrift der Sumerer: • Hybride Zahldarstellungen • Basis
18. Jh. v. Chr.	Erstes Stellenwertsystem babylonischer Gelehrter: • Prinzip des Stellenwerts • Zahldarstellung • Zahlberechnung • Begrenzter Ziffernvorrat
3. Jh. v. Chr.	Die erste bekannte Null wird von Gelehrten Babylons genutzt.
2. Jh. v. Chr.	Die ersten Brhami-Ziffern treten in buddhistischen Dokumenten auf. Sie sind die

	Grundlage der indischen, indisch-arabischen und indisch-arabisch-europäischen Ziffern.
595 n. Chr.	Auftreten eines indischen Textes, der sowohl das Stellenwertsystem, als auch die heute in der Moderne genutzten Ziffern von 1 bis 9 enthält.
598 n. Chr.	Auftreten eines Dokuments mit der indischen Null.
7. Jh. n. Chr.	Die moderne Zahlschrift hat sich in Indien durchgesetzt.
10. – 12. Jh. n. Chr.	Europäische Rechnende verwenden den Abakus mit den neun indisch-arabischen Ziffern.
15. Jh. n. Chr.	Die moderne Zahlschrift hat sich in Europa durchgesetzt.

Tabelle 2: Meilensteine der Zahlentwicklung (vgl. Ifrah 1991, 545ff.).

Die von Problemen und ihren Lösungen geprägte Geschichte der Zahl verdeutlicht, welche Errungenschaften mit einem solch einfach zu nutzenden Mittel wie dem Stellenwertsystem verbunden sind. Das Stellenwertsystem als ein aus der menschlichen Kultur entstandenes Mittel ist wohl einer der wichtigsten Faktoren für die Entwicklung der modernen Mathematik – es ist „eine der Grundlagen der geistigen Fähigkeiten der modernen Menschen“ (ebd., 478).

2.4.6 Invarianten, Stellenwert-Verständnis, Vorläuferkompetenzen (Rosemann)

Nach der Vorstellung wesentlicher aufsteigender Abstraktionen entsprechend der Geschichte der Zahlentwicklung kann eine Keimzelle mit den Invarianten des Stellenwertsystems erstellt werden:

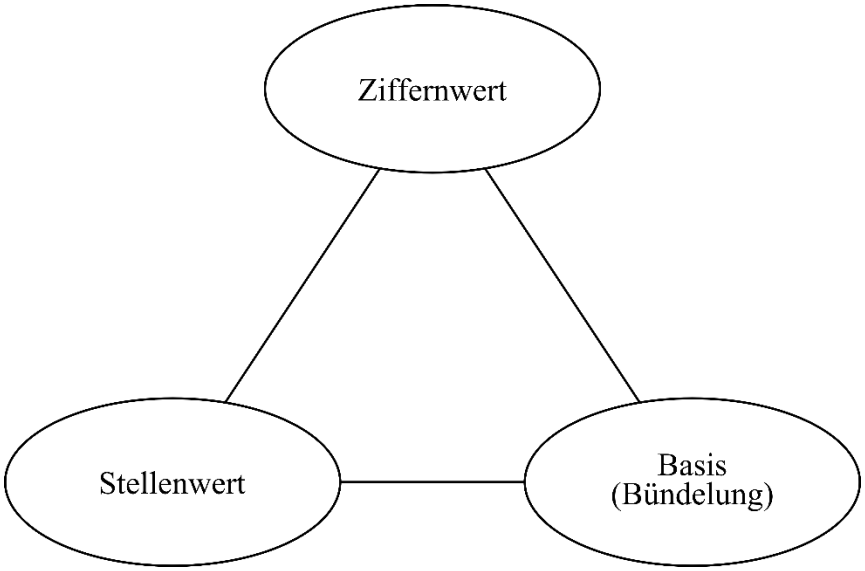

Abb. 6: Keimzell-Modell der Invarianten des Stellenwertsystems in formal-symbolischer Darstellung

Die Invarianten stehen in einem gegenseitigen Verhältnis; ändert sich die Basis, so verändern sich ebenfalls die Stellen- und Ziffernwerte. Die Basis beruht – wie im Kapitel zur Geschichte der Zahlentwicklung dargestellt – auf dem Prinzip der Bündelung, da sie die Größe des Stellen-Werts bestimmt. So ist 10 die Basis in unserem dezimalen Stellenwertsystem – es werden also jeweils zehn Einheiten (oder Bündel) zu einer neuen Bündelungseinheit zusammengefasst. Die Basis 10 bestimmt damit über die Bündelungsgröße die Stellenwerte:

$$(10^0, 10^1, 10^2, \dots , 10^{k-1})$$

Gleichzeitig werden der Ziffernvorrat und die möglichen Ziffernwerte durch die Größe der Basis bestimmt. So ist der mögliche annehmbare Wert einer Ziffer stets eine Einheit geringer als die Größe der Basis, zu der gebündelt wird. Im Falle der Basis 10 kann eine Ziffer die Werte 0, 1, 2, …, 9 annehmen.

Allerdings muss entsprechend des Z^4-Zahlmodells zwischen drei verschiedenen Repräsentationsformen der natürlichen Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem differenziert werden (vgl. Schwank 2011,1157f.). Neben einer Zahldarstellung durch *Zahlzeichen* (etwa ‚17') werden Zahlen entsprechend dem dezimalen Stellenwertsystem ebenfalls durch *Zahlwörter* (siebzehn) und durch *analoge Größenrepräsentationen* – dies wird im Z^4-Modell durch den Begriff der Zahlidee beschrieben – repräsentiert (vgl. ebd.).

Eine analoge Größenrepräsentation kann kardinal (●●●●● ●●●●● ●●●●● ●●) oder kardinal-ordinal in der Logik eines Stellenwertsystems gebildet werden:

Zehner(-bündel)	Einer
●	●●●●● ●●

Wie nachstehend zu zeigen ist, sind für die jeweiligen Darstellungen verschiedenen Invarianten zu berücksichtigen.

Weiterhin ist danach zu fragen, welche Fähigkeiten und Fertigkeiten benötigt werden, um mit dem Stellenwertsystem kompetent umgehen zu können. Zur Annäherung an die Beantwortung dieser zweiten Frage können zwei Wege gewählt werden. Zum einen kann die Perspektive ‚von oben', also von der mathematischen Definition des Stellenwertsystems ausgehend gewählt werden – dieser Weg wurde in Teilen von der Mathematikdidaktik bereits verfolgt, obwohl bezüglich des Stellenwertverständnisses festgehalten werden kann:

> Zahlreiche Veröffentlichungen, auch Lehrpläne und Curricula nehmen darauf Bezug, indem sie entweder ein tragfähiges Stellenwertverständnis als notwendige Voraussetzung für den Aufbau von flexiblen Zahlvorstellungen und Rechenstrategien oder ein mangelndes als Symptom für besondere Schwierigkeiten beim Rechnen nennen. Während mathematisch klar definiert ist, was unter dem (dezimalen) Stellenwertsystem verstanden werden kann, liegt keine eindeutige Beschreibung von ‚Stellenwertverständnis' [sic] vor (Wartha & Benz 2017, V).

Zum anderen können ‚von unten' pränumerische Vorläuferfertigkeiten beschrieben werden. Auch dies wurde in Teilen von der Mathematikdidaktik geleistet, allerdings wurden bisher häufig empirische Untersuchungen genutzt, um eine Vorstellung vom Begriffserwerb zu gewinnen. Dieses Vorgehen wird für die nachstehende Ermittlung der pränumerischen Vorläuferfertigkeiten nicht angenommen – auch dies wird noch zu begründen sein. Vielmehr werden dazu die aus der Geschichte geschlossenen aufsteigenden Abstraktionen nutzbar gemacht – denn wie gezeigt wurde, entstanden diese Zahlabstraktionen ebenfalls ausgehend von pränumerischen Vorläuferfertigkeiten. Allerdings wurden im Zuge der Analyse der Geschichte der Zahl einige erfahrungs- und personenbezogene Aspekte nicht beschrieben.

Doch zunächst sei auf die verschiedenen Zahlrepräsentationen eingegangen.

2.4.6.1 Invarianten der Zahlrepräsentationen (Rosemann)

Das Verfügen über die *formal-symbolische Zahldarstellung* gilt als ein Bestandteil des Stellenwertverständnisses (vgl. Fromme 2017, 44 mit Bezug auf van de Walle). Für den Fall der symbolischen Darstellung der natürlichen Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem mittels Ziffern gelten die drei Invarianten Basis (Bündelung), Stellenwert sowie Ziffernwert (vgl. Fromme 2017, 44f.). Der Wert einer dargestellten Ziffer konstituiert sich aus der Kombination der besetzten Stelle, also des Stellenwerts und des Ziffernwerts:

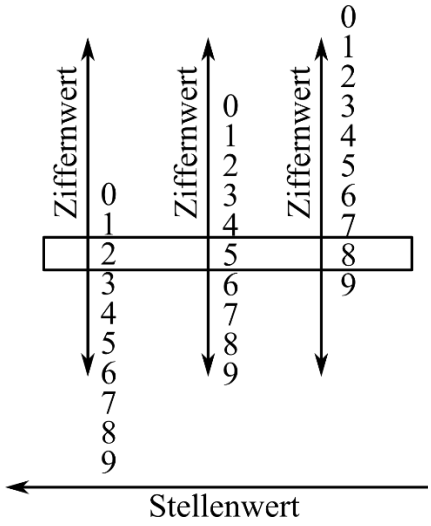

Abb. 7: Konstitution des Zahlwerts im dezimalen Stellenwertsystem

Die in der Schreibweise 258 enthaltene Information kann ausgeschrieben wie folgt dargestellt werden: $258 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1$

Die Basis 10 des dezimalen Stellenwertsystems ist konventionalisiert und wird nicht angegeben – sie ist daher indirekt in der dezimalen Zahldarstellung enthalten. Wird eine andere Basis genutzt, muss diese allerdings in der Notation angezeigt werden. Im diesem Fall wird die Basis durch eine tiefgestellte Zahl gekennzeichnet, also etwa im Oktalsystem (Basis 8) wie folgt.

$$[402]_8 = 4 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 4 \cdot 64 + 2 \cdot 1 = 256 + 2 = 258$$

Aber eine Zahl kann im dezimalen Stellenwertsystem nicht allein durch die beschriebene Normalform dargestellt werden – auch eine Zahldarstellung mittels Rechenoperationen, etwa der

Summenschreibweise (200 + 50 + 8) sowie eine Darstellung mittels Bündelwertzahlen (2 Hunderter 5 Zehner 8 Einer, bzw. 2H 5Z 8H) sind mögliche Zahldarstellungen (vgl. Fromme 2017, 45).

Allerdings ändert sich die Darstellung einer Zahl, die im Stellenwertsystem strukturiert ist, wenn sie sprachlich in einem *Zahlwort* repräsentiert wird. Dazu wird im Deutschen statt des Stellenwerts eine Darstellung in Bündelwertzahlen verwendet, die allerdings nicht der formal-symbolischen Darstellung entspricht. So bemerkt Schwank (2013a), dass „die deutsche Umgangssprache dem Aufbauprinzip der mittlerweile universellen Weltzahldarstellung nur unzureichend gerecht“ (98) wird.

Denn würde die Zahl 258 = 2H 5Z 8E nach den Konstruktionsprinzipien des dezimalen Stellenwertsystems versprachlicht, müsste sie beispielsweise als ‚zweihundertfünfzigacht‘ = 2H 5Z 8E bezeichnet werden. Stattdessen wird sie als Bündelwertzahl ‚zweihundertachtundfünfzig‘ = 2H 8E 5Z, also nicht der Logik des Stellenwerts entsprechend, dargestellt.

Zudem ist auch das Prinzip der Bündelwertzahl nicht konsequent umgesetzt. So sind die Zahlwörter für die Zahlen 1 bis 12 Eigennamen und werden auswendig gelernt, die Zahlen 13 bis 99 werden durch Zahlwörter für die Einer und für die Dekadennamen (zehn, zwanzig, …, neunzig – diese sind ebenfalls auswendig zu lernen) in der Systematik Anzahl-Einer-(und-)Dekadenname (vier-zehn; fünf-und-neunzig) versprachlicht (vgl. Fromme 2017, 46). Die Zahlen 100 bis 999 werden wiederum in anderer Form ausgesprochen. Die größte Bündeleinheit ‚Hunderter‘ wird nun zuerst angegeben (Anzahl-Bündel-hundert – ‚zwei-hundert‘), während die übrigen Bündel mittels der bereits beschrieben Systematik dargestellt werden.

Ein Zahlwort ist in vielen Fällen also durch mehrere Zahlwörter dargestellt (drei, zwölf, hundert vs. einhundertelf, fünfundfünfzig, dreihundertvierundsechzig). Die Basis und damit die Größe der Bündelungen bleibt weiterhin notwendig für eine eindeutige Zahldarstellung.

Aufgrund der beschriebenen sprachlichen Besonderheiten konstituiert sich der Wert einer sprachlich dargestellten Zahl im Komplex folgender Invarianten:

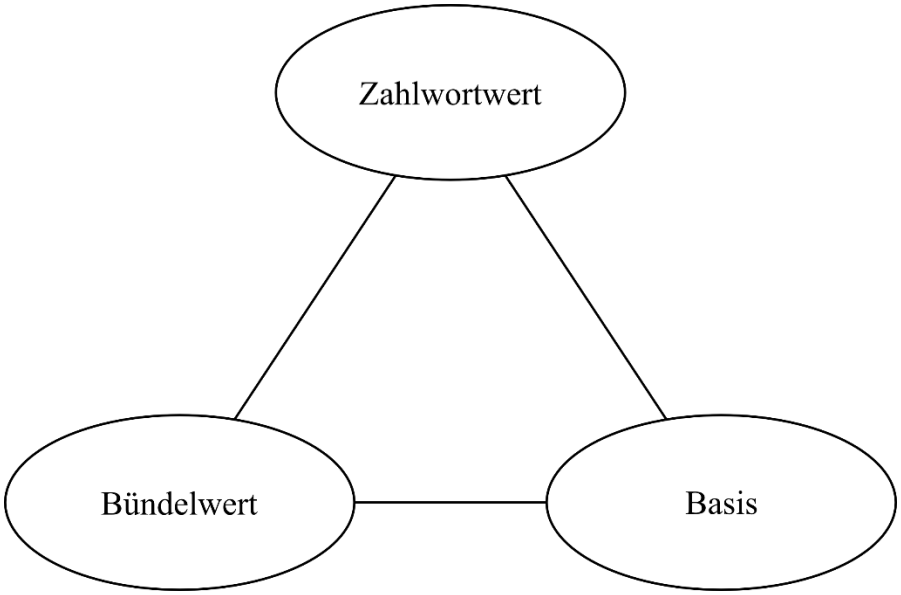

Abb. 8: Keimzell-Modell der Invarianten des Stellenwertsystems in sprachlicher Darstellung

Allerdings kann der Logik des dezimalen Stellenwertsystems auch sprachlich gefolgt werden. So kann etwa durch die Stellenwertsprechweise 258 = 2H 5Z 8E = ‚zwei Hunderter, fünf Zehner und acht (Einer)' bzw. = ‚zwei-hundert-fünf-zehn(er)-acht' auch das Prinzip des Stellenwerts übernommen werden (vgl. Schwank 2013a, 98; vgl. Fromme 2017, 46).

Dass eine solche Sprachsystematik eine einfachere Übersetzung sprachlicher in formal-symbolische Zeichen und ein leichter zugängliches Verstehen des Prinzips des Stellenwerts in formal-symbolischer Darstellung ermöglicht, ist evident. Die Bedeutung des ordinalen Zahlaspekts und damit des Zählens für die Zahlentwicklung wurde bereits im Zuge der Darstellung der Zahlgeschichte hervorgehoben.

Die Art der gängigen Versprachlichung der Zahlen ist insbesondere deswegen als problematisch zu bewerten, weil das Zählen eine zentrale Bedeutung für den Erwerb mathematischer Kompetenzen in der frühen Kindheit hat: Kinder lernen meist das Zählen anhand von Zahlwörtern – oft können sie Zahlen > 12 zählen, bevor sie das Schreiben von Zahlen nach dem Prinzip des Stellenwertsystems erlernen (vgl. Fromme 2017, 48 mit Bezug auf Eysen).

Allerdings bietet die Zahlversprachlichung selbst im Falle der inkonsequenten deutschen Systematik auch die Chance, Strukturen des Dezimalsystems zu erkennen und diese zu reflektieren. So wird zumindest für das Zählen von Zahlen > 20 das Prinzip der Bündelung zu Zehnern und Hundertern notwendig – ein Auswendiglernen der Zahlen 20-999 ist aufwändig und angesichts

des regelmäßigen Erzeugungsalgorithmus nicht notwendig (vgl. ebd., 49). Eine korrekte Zählweise ist daher ein Hinweis auf eine strukturelle Einsicht.

Die Beschreibung von Invarianten für analoge Größenrepräsentationen verschiedener Form, wie didaktische strukturierte Anschauungsmittel (etwa Dienes-Systemblöcke oder Cuisenaire-Stäbe), historische konkrete strukturierte Rechenmittel (zum Beispiel der Abakus oder das Rechentuch auf Basis des dezimalen Stellenwertsystems) oder historische konkrete unstrukturierte Rechenmittel (zum Beispiel eine große Menge gleichwertiger Kieselsteine) kann aufgrund der Varianz der Mittel nicht allgemein erfolgen. Allerdings sei angemerkt, dass diese konkreten Mittel keine Invarianten in diesem Sinne haben, dass sie „keine empirischen Tatsachen abbilden, sondern theoretische mathematische Begriffe repräsentieren“ (ebd., 50 mit Bezug auf Söbbeke). Die mathematischen Eigenschaften werden daher in die konkreten Mittel ‚hineingesehen‘, weshalb vielmehr zu fragen ist, im Falle welchen Mittels für welche Invarianten diese Abstraktionsleistung möglichst einsichtig geschehen kann. Die Auswahl der Mittel und die Analyse dieser erfolgt daher entsprechend der aufsteigenden Abstraktionen.

Bevor nun die Beschreibung aufsteigender Abstraktionen des dezimalen Stellenwertsystems ausgehend von einem möglichst basalen Niveau erfolgen kann, muss neben den bereits erfolgten Analysen der Geschichte der Zahldarstellung und der Beschreibung der Invarianten der Zahldarstellungen auf dem höchsten Niveau der Erkenntnis noch eine erfahrungs- und personenbezogene Analyse der notwendigen basalen Fertigkeiten erfolgen.

2.4.6.2 Stellenwert-Verständnis und pränumerische Vorläuferfertigkeiten (Rosemann)

Vor der Erläuterung einiger wesentlicher Erkenntnisse zur Entwicklung eines Stellenwertverständnisses und pränumerischer Vorläuferfertigkeiten sei angemerkt, dass die Frage, welche entwicklungs- und personenbezogenen Aspekte – seien dies sensomotorische Gegebenheiten, neuropsychologische Momente, persönliche Einstellungen bezüglich des Sinns eines Gegenstandes oder der Reflexion von Handlungen, aus denen Abstraktionen erwachsen – und die Frage, in welchem Maße diese Aspekte das Stellenwertverständnis beeinflussen, aufgrund der Ganzheitlichkeit eines hochkomplexen bio-psycho-sozialen Systems Mensch wohl kaum final zu klären sind.

Als ein Beispiel für diese Tatsache sei die Komplexität der sensorischen Integration nach Anna Jean Ayres (2013) aufgeführt, „die Zusammenhänge zwischen Schwierigkeiten in der Interpretation von Körper- und Umweltwahrnehmung und schulischen und motorischen Lernschwierigkeiten“ (Bundy & Murry 2007, 4) herzustellen versucht.

Gleichzeitig ist zu konstatieren, dass „mathematische Konzepte […] nicht unmittelbare Destillate von sensomotorischen Leistungen und Erfahrungen“ (Gerster & Schultz 2004, 49) sind.

Allein aufgrund der Tatsache, dass „es keine abgeschlossene und umfassende Theorie der Entwicklung der mathematischen Kompetenzen“ (Gerster & Schultz 2004, 53) gibt, können im Kontext der vorliegenden Arbeit die Faktoren, die in das Stellenwertverständnis eingehen, nicht erschöpfend aufgearbeitet werden (vgl. auch Fromme 2017, 11ff.). Dennoch seien einige wesentliche Aspekte dieser Entwicklung angesichts der gewonnenen aufsteigenden Abstraktionen dargestellt.

Allerdings sei angemerkt, dass dieses Vorgehen an den wesentlichen Erkenntnissen und Abstraktionen der menschlichen Phylogenese orientiert ist, die es nach Meinung der Verfassenden für ein nachhaltiges Verständnis seitens der Lernenden nachzuvollziehen bzw. neu zu konstruieren gilt. Dieses Vorgehen kann wie folgt begründet werden.

Wird nämlich die tatsächliche ontogenetische Entwicklung empirisch untersucht[16], so sind die Aspekte dieser Entwicklung entgegen der inneren Logik der aufsteigenden Abstraktionen der Zahlentwicklung kaum trennscharf zu ermitteln. Der Grund kann in der frühen sozialen Konfrontation mit kulturhistorischen Mitteln vermutet werden, in denen schließlich diese Abstraktionen angelegt sind. Ein Kind muss nicht selbstständig auf die Idee kommen Zahlen einer gleichbleibenden Abfolge zuzuordnen, sondern findet dieses Mittel bereits vor. Auch die Erkenntnis, dass die letztgenannte Ordinalzahl die Anzahl der Menge (Kardinalzahlaspekt) beschreibt, kann der Verwendung des Mittels des Zählens erst nachfolgen. So wird wohl in vielen Fällen der Kindesentwicklung das Faktenwissen entstehen, dass die letztgenannte Zählzahl wiederholt werden muss, um auf die Frage ‚wie viele‘ zu antworten, ohne dass die Bewusstheit

[16] Eine Übersicht über den aktuellen empirischen Forschungsstand verschiedener Studien zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses liefert Fromme (2017).

vorhanden sein muss, welche Konzepte, welche Abstraktionen sich hinter der letztgenannten Zählzahl verbergen.

Die erstaunliche Einfachheit und Effizienz des heutigen Zahlbegriffs und seiner Repräsentation durch das dezimale Stellenwertsystem und die konventionalisierte Zahlfolge in Zahlwörtern mag auch die Gefahr einer unverständigen Verwendung bergen. So war es noch im Europa des 15. Jahrhunderts am ehesten in speziellen Universitäten möglich, die Division und Multiplikation zu erlernen – Rechenoperationen also, die heutzutage viele Grundschulkinder mit dem Mittel des Stellenwertsystems in den ersten Schuljahren durchführen (vgl. Zimpel 2008, 40).

Gleichzeitig ist diese Effizienz der Mathematik kompetenten anderen wohl häufig ebenfalls nicht bewusst, sodass die Einfachheit des Mittels die darin enthaltenen komplexen Erkenntnisse verdeckt:

> Es ist […] nicht leicht, ein solches Wissen [über die Entwicklung mathematischen Verständnisses, T.R.] zu gewinnen. Ein Grund dafür ist, dass das Zahlverständnis des Erwachsenen von dem des Kindes erheblich abweicht und wir Erwachsene keinen unmittelbaren Zugang zu der Sichtweise des Kindes haben: Wir haben unser Zahlverständnis allmählich in einem Prozess gewonnen, den wir nicht reflektierend begleitet haben. Gerade die ersten Schritte haben wir ‚unbewusst' vollzogen. Unser ‚erwachsenes' Wissen und Verstehen kann zu einer falschen Konzeption des Erwerbsprozesses führen (Gerster & Schultz 2004, 43).

Daher ist aus Sicht der Verfassenden nicht vorrangig der ontogenetische, sondern der phylogenetische Entwicklungsprozess der Abstraktionen zu fokussieren, der durch Erkenntnisse der Individualentwicklung ergänzt werden sollte. Denn so besteht die Chance, die innere Logik der aufsteigenden Abstraktionen mit den Voraussetzungen der Entstehung dieser inneren Logik im Subjekt zu verbinden.

Angenommen werden kann, dass der Ausgangspunkt sowohl der ontogenetischen wie der phylogenetischen Entwicklung das Zahlgefühl und damit die Wahrnehmung nur natürlicher Vielzahlen war. Der erste Aspekt des Umgangs mit einer unnatürlichen Vielzahl wurde durch das Mittel der Eins-zu-Eins-Zuordnung gelöst und führte zu einer kardinalen Zahldarstellung sowie zu Hilfsmengen. Gleichzeitig entspricht diese Eins-zu-Eins-Zuordnung einem bedeutsamen Aspekt des Zählens.

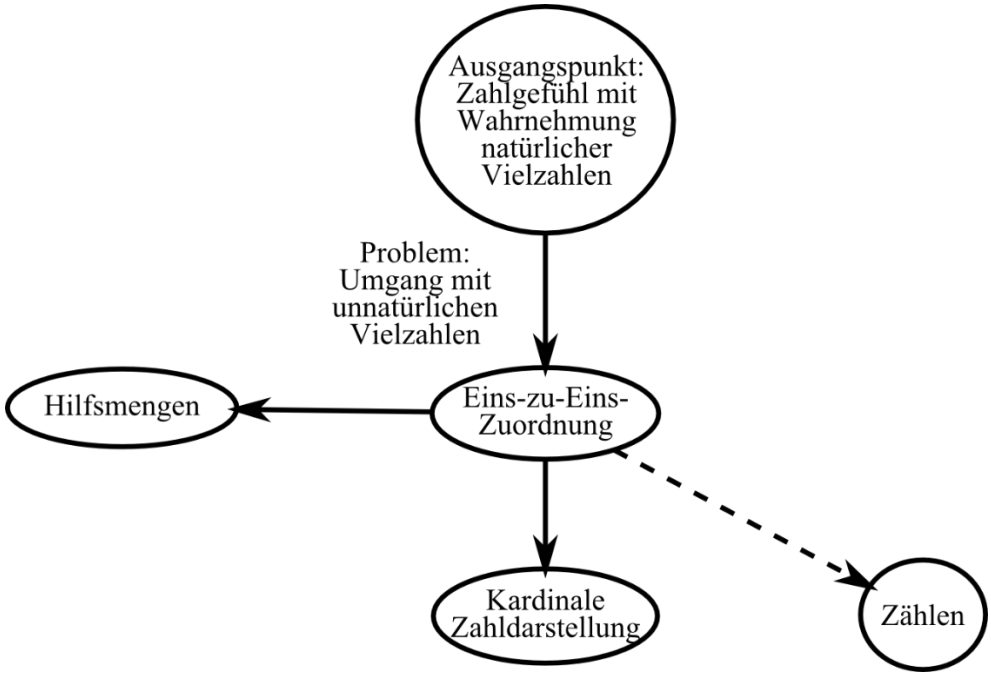

Abb. 9: Lösung des Problems des Umgangs mit unnatürlichen Vielzahlen

Offensichtlich muss dazu nach der *Wahrnehmung von Elementen* ebenso die Erkenntnis erwachsen sein, dass solche wahrnehmbaren Mengen *endlich* sind und dass „deren Endlichkeit durch das Zählen bestimmt werden kann“ (Gerster & Schultz 2004, 58) – wobei hier das Mittel des Zählens noch nicht vollständig ausgebildet sein muss.

Gleichzeitig müssen im Zuge der Eins-zu-Eins-Zuordnung, der kardinalen Zahldarstellung und um überhaupt eine Kollektion von Elementen wahrnehmen zu können, räumliche Aspekte integriert werden: Schon Säuglinge scheinen manchmal Unterschiede zwischen kleineren Menge anhand der räumlichen Ausdehnung ihrer Elemente zu erkennen (vgl. Schneider et al. 2016, 15). Zugleich kann die konkrete Eins-zu-Eins-Zuordnung nur unter Zuhilfenahme der *räumlichen Orientierung* vollzogen werden, da diese im Raum stattfindet und nur so ermittelt werden kann, welche Elemente bereits zugeordnet wurden. Ebenfalls sind kardinale Darstellungen (und im Übrigen alle Darstellungen – dies wird an der Invariante des Stellenwerts besonders deutlich, da hier eine Links-Rechts-Unterscheidung notwendig wird) räumliche Darstellungen. Die Ent-

wicklung dieser räumlichen Orientierung geht dabei vom *Körperschema* und damit von *motorischen Vorerfahrungen* aus und verläuft zu der Entwicklung der Raumbegriffe (vgl. Hirtz et al. 2005, 64f.; vgl. auch de Vries 2014, 19[17]).

Auch wenn diese Schlussfolgerungen evident erscheinen, muss angemerkt werden, dass über die Bedeutung der Motorik und der Raum-Lage-Wahrnehmung für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten kontrovers diskutiert wird. So bestreiten Schneider et al. (2016) zwar nicht einen Einfluss dieser von ihnen so benannten *unspezifischen Vorläuferfertigkeiten*, gehen aber davon aus, dass „die Bedeutung solcher […] für den Aufbau spezifischer mathematischer Kompetenzen deutlich relativiert werden muss“ (24).

Dieser Meinung schließen sich die Verfassenden bezüglich der Eins-zu-Eins-Zuordnung und der Wahrnehmung von Mengen nicht an, da die Bedeutung für im Raum Befindliches zumindest historisch der Ausgangspunkt aller Mathematik zu sein scheint. Außerdem beginnen nahezu alle Kinder unter Zuhilfenahme ihrer motorischen Fertigkeiten ihre ersten Zählversuche mittels Eins-zu-Eins-Zuordnungen vorzunehmen (vgl. Gerster & Schultz 2004, 58f.). Zudem ist im Kontext einer sozialen Behinderungsgenese anzumerken, dass diese sog. unspezifischen Vorläuferfertigkeiten unbedingt als Kompetenzen anerkannt werden sollten, da durch sie niemand vom Mathematiklernen ausgeschlossen wird.

Doch welche Aspekte sind notwendig, um sich das Mittel des Zählens anzueignen, um also eine konkrete oder abstrakte unnatürliche Vielzahl kognitiv zu repräsentieren?

Dazu ist bezüglich der konventionalisierten Zahlfolge als sog. unspezifische Vorläuferfertigkeit die *Kommunikation* über diese Zahlfolge vonnöten. Daraus kann dann eine *Zahlwortkenntnis* durch erste Erfahrungen mit Zahlwörtern erwachsen, die in einer *exakten Zahlwortfolge* aufgehen (vgl. Schneider et al. 2016, 25). Diese Zahlfolge wird nach dem klassischen Modell zur Zahlwortentwicklung von Karen Fuson (1988) zuerst als undifferenzierte Zahlwortkette erlernt, die nicht mit einer Eins-zu-Eins-Zuordnung verbunden ist und eher wie ein Gedicht aufgesagt wird (einszweidreivierfünfsechs) (vgl. Schneider et al. 2016, 21). Dies weist darauf hin, dass

[17] Obwohl an dieser Stelle darauf hingewiesen werden muss, dass die Herkunft der in de Vries (2014) dargestellten Erkenntnisse nur in Teilen kenntlich gemacht wurde.

auch konventionalisierte Zahlwörter in ihrer Folge erst mit dem Konzept der Eins-zu-Eins-Zuordnung verbunden werden müssen. Ein Zeichen für diesen Lernprozess ist etwa der typische Fehler der Eins-zu-Eins-Zuordnung im Falle der zweisilbigen Zahl sieben:

> Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sie- ben, acht, neun, zehn
>
> • • • • • • • • • • • (Benz et al 2015, 32).

Außerdem muss für ein weiterführendes Lernen der Zahlwörter ihre *Struktur* erkannt werden – hier werden einige Strukturaspekte des dezimalen Stellenwertsystems verwendet (vgl. Fromme 2017, 58).

Gleichzeitig zur konventionalisierten Zahlfolge und der mit ihr verbundenen Eins-zu-Eins-Zuordnung muss für ein verständiges Zählen eine Integration von Kardinalzahlaspekt und Ordinalzahlaspekt gelingen. Die schließt die Abstraktion einer *Teil-Ganzes-Beziehung* ein – der Erkenntnis also, dass im Ganzen einer beim Zählen erreichten Ordinalzahl (etwa 12) auch geringere Teil-Mengen enthalten sind (etwa 7, denn 12 > 7), dass also ein gesprochenes Zahlwort die Menge, die das vorherige Zahlwort repräsentierte, mit einschließt und dass das gezählte Ganze in verschiedene Teile unterteilt werden kann (vgl. Fromme 2017, 58f.). Auch, wenn Kinder häufig schon eine Vorstellung über diese Teil-Ganzes-Beziehung haben (vgl. Benz et al 2015, 136), kann eine vollendete Erkenntnis über die Teil-Ganzes-Beziehung nur dann erwachsen, wenn Gewissheit über die *Mengeninvarianz* besteht – also das Wissen darüber, dass sich die Mächtigkeit einer einmal gezählten Menge und damit ihre Kardinalzahl nur dann ändert, wenn ein Element entfernt wird (vgl. Benz et al. 2015, 122).

Diese Teil-Ganzes-Beziehung ist ebenso im Bündelungsprinzip enthalten und ersichtlich, da durch die Entbündelung eines Bündels ihre Teile offensichtlich werden – die Einsicht in die Teil-Ganzes-Beziehung ist eine wesentliche Voraussetzung für das Verständnis des Bündelungsgedankens (vgl. Fromme 2017, 59). Zugleich muss die Vorstellung der Gruppenbildung für das Verständnis für den Prozess der Bündelung ausgebildet sein, was ebenfalls mit dem Begriff des *Strukturierens*[18] (von Material) gefasst werden kann (vgl. ebd., 58ff.). Unter Zuhilfenahme des Strukturierens und durch die Einsicht in die Teil-Ganzes-Beziehung kann dann die

[18] Generell ist im Übrigen das Erkennen, Beschreiben und Nutzen von Mustern und Strukturen eines der wesentlichen Aufgabenfelder der Mathematik, sodass sie im allgemeinen Sinne als „Wissenschaft der Muster“ (Korff 2015,

erkannte oder erzeugte Struktur durch Symbole unterschiedlicher Wertigkeit überformt werden. So kann man etwa fünf zusammengelegte Einzelelemente durch ein Bündelsymbol (enaktiv – ikonisch – symbolisch) ersetzen[19]. Erst durch diese Symbole unterschiedlicher Wertigkeit als Bündel-Repräsentanten kann eine ordinale oder kardinal-ordinale Zahldarstellung erfolgen.

Nun ist zu fragen, welche Einsichten und Fertigkeiten zum Aufsteigen zu der nächsten Abstraktionsstufe – der Logik des multiplikativen Prinzips und der damit verbundenen hybriden Zahldarstellung gegeben sein müssen. Dabei sei zunächst auf basale Rechenfertigkeiten eingegangen. Diese sind bereits in der Einsicht in die Teil-Ganzes-Beziehung angebahnt, müssen sich aber davon ausgehend um weitere *Grundvorstellungen der Rechenoperationen* erweitern (vgl. Benz et al. 2015, 136).

Benz et al. (2015, 141f.) beschreiben folgende Beobachtung aus einer Untersuchung von Riley et al. (1983): 91% der befragten Erstklässlerinnen und Erstklässler konnten folgende Aufgabe lösen:

> Hans hat 8 Murmeln. Peter hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln muss Peter noch bekommen, damit er genauso viele hat wie Hans? (Benz et al. 2015, 141).

Dies ist wenig verwunderlich, da die Vorstellung der Handlung des Ergänzens, also zu jeder überschüssigen Murmel eine weitere zuzuordnen (Eins-zu-Eins-Zuordnung) und dabei jede Eins-zu-Eins-Zuordnung zu zählen, den Kindern vertraut gewesen sein dürften (vgl. ebd.). Interessant hingegen ist, dass nur 28% dieser befragten Kinder folgende Frage beantworten konnten:

> Hans hat 8 Murmeln. Peter hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Peter weniger als Hans? (ebd.).

Obwohl diese Aufgabe auf die gleiche Situation referiert und mit gleichen Quantitäten gestellt ist, fehlte den Kindern hier vermutlich zur Lösung dieses Vergleichs eine explizite Rechenstrategie, es fehlte ihnen wohl eine adäquate Grundvorstellung (vgl. ebd., 142).

---

74) gefasst werden kann. Diese Auffassung vertretend, ist das Strukturieren und das Benutzen von Strukturen ein Vorgehen, das auf allen Ebenen des mathematischen Verständnisses bedeutsam ist. So war auch bezogen auf die Geschichte der Zahlentwicklung bereits der erste Schritt der Zahlrepräsentation mithilfe von Eins-zu-Eins-Zuordnungen und Kerben auf Knochen ein Strukturierungsprozess.

[19] Piaget fasst diese Fertigkeiten und Einsichten mit den Begriffen Klasseninklusion und Klassifikation (vgl. Benz et al. 2015, 123).

Benz et al (2015, 142ff.) benennen mit Bezug auf Riley vier wesentliche Grundvorstellungen bzw. -situationen der Addition und Subtraktion:

Das *Verbinden* zweier Menge zu einer Menge (oder der andere Weg des Trennens einer Menge in zwei Mengen) ist aus der Teil-Ganzes-Beziehung ersichtlich:

- ‚Habe ich 4 Brote und ein Kind hat 2, dann haben *wir* 6 Brote' (Addition: 4 + 2 = __)
- ‚Wir haben *zusammen* 6 Brote und ich habe 4. Dann muss das andere Kind 2 haben' (Subtraktion: 6 – 4 = __).

Die Vorstellung des *Veränderns* fokussiert hingegen auf nur eine Menge:

- ‚Ich habe 4 Brote und bekomme 2 Brote. Also habe *ich* jetzt 6 Brote' (Addition: 4 + 2 = __)
- ‚Ich habe 6 Brote und gebe 4 Brote ab. Also habe *ich* jetzt 2 Brote' (Subtraktion: 6 – 4 = __).

Um die Vorstellung des *Vergleichens* nutzbar zu machen, müssen wiederum zwei Mengen berücksichtigt werden:

- ‚Ich habe 6 Brote und ein anderes Kind hat 4 Brote. Das Kind hat also 2 Brote *weniger als* ich' (Addition: __+ 4 = 6)
- ‚Ich habe 6 Brote und ein anderes Kind hat 4 Brote. Ich habe also 2 Brote *mehr als* das andere Kind' (Subtraktion: 6 – 4 = __).

Die Grundvorstellung des *Aus- und Angleichens* ist ebenfalls auf zwei Mengen bezogen:

- ‚Ich habe 2 Brote und ein anderes Kind hat 6 Brote. Ich muss also *noch 4 bekommen*, damit ich so viel habe wie das andere Kind' (Addition: 2 + __ = 6)
- ‚Ich habe 6 Brote und ein andere Kind hat 2 Brote. Ich muss also *noch 4 wegtun*, damit ich genau so viele habe wie das andere Kind' (Subtraktion: 6 - __ =2 (vgl. ebd.).

Doch warum sind diese Grundvorstellungen, aus denen die elementarsten Rechenoperationen erwachsen, für das Verständnis des Stellenwertsystems so bedeutend? Wieso schließt „ein weit entwickeltes Verständnis des Zahlbegriffs auch ein Verständnis von arithmetischen Operationen wie Addition und Subtraktion mit" (ebd., 141) ein?

Eine Begründung für diese Tatsache liegt darin, dass das dezimale Stellenwertsystem gerade beides ist: Zahldarstellungs- und Zahlberechnungsmittel. Dies ist an der Geschichte der Zahlentwicklung ersichtlich, da sowohl die hybriden Zahldarstellungen mittels des multiplikativen Prinzips entstanden und da konkrete Rechenverfahren auf der Logik der hybriden Zahldarstellungen (und der wiederum in diese eingegangenen Abstraktionen) die Entwicklung von Stellenwertsystemen erst hervorbrachten (vgl. Geschichte der Zahl).

Aus einer Einsicht in das Bündelungsprinzip, das nur mit der Fähig- und Fertigkeit des Strukturierens erkannt werden kann und aus Einsichten in das Verhalten von Mengen, auf die Rechenoperationen angewandt werden, kann somit das Prinzip des Stellenwerts abstrahiert werden. Zusammen mit der Erkenntnis der Bedeutung der Null, welche adäquat zur geschichtlichen Entwicklung erst an dieser Stelle des Abstraktionsprozesses wirklich bedeutsam ist (vorher könnte auf den Begriff der Null verzichtet werden, da schließlich der Begriff des Nichts für die Beschreibung einer leeren Menge ausreicht) und mit dem Erlernen der ordinalen Ziffern 1 bis 9 sind einige wesentliche erfahrungs- und personenbezogene Aspekte des Stellenwertverständnisses beschrieben.

In der nachfolgenden Abbildung sind die erarbeiteten Aspekte der phylogenetischen Zahlentwicklung und die erarbeiteten ontogenetischen Aspekte, die für die entsprechenden Abstraktionsleistungen bedeutsam erscheinen, dargestellt. Dabei gehen die Abstraktionen niedrigerer Ebene in die aufsteigenden Abstraktionen mit ein.

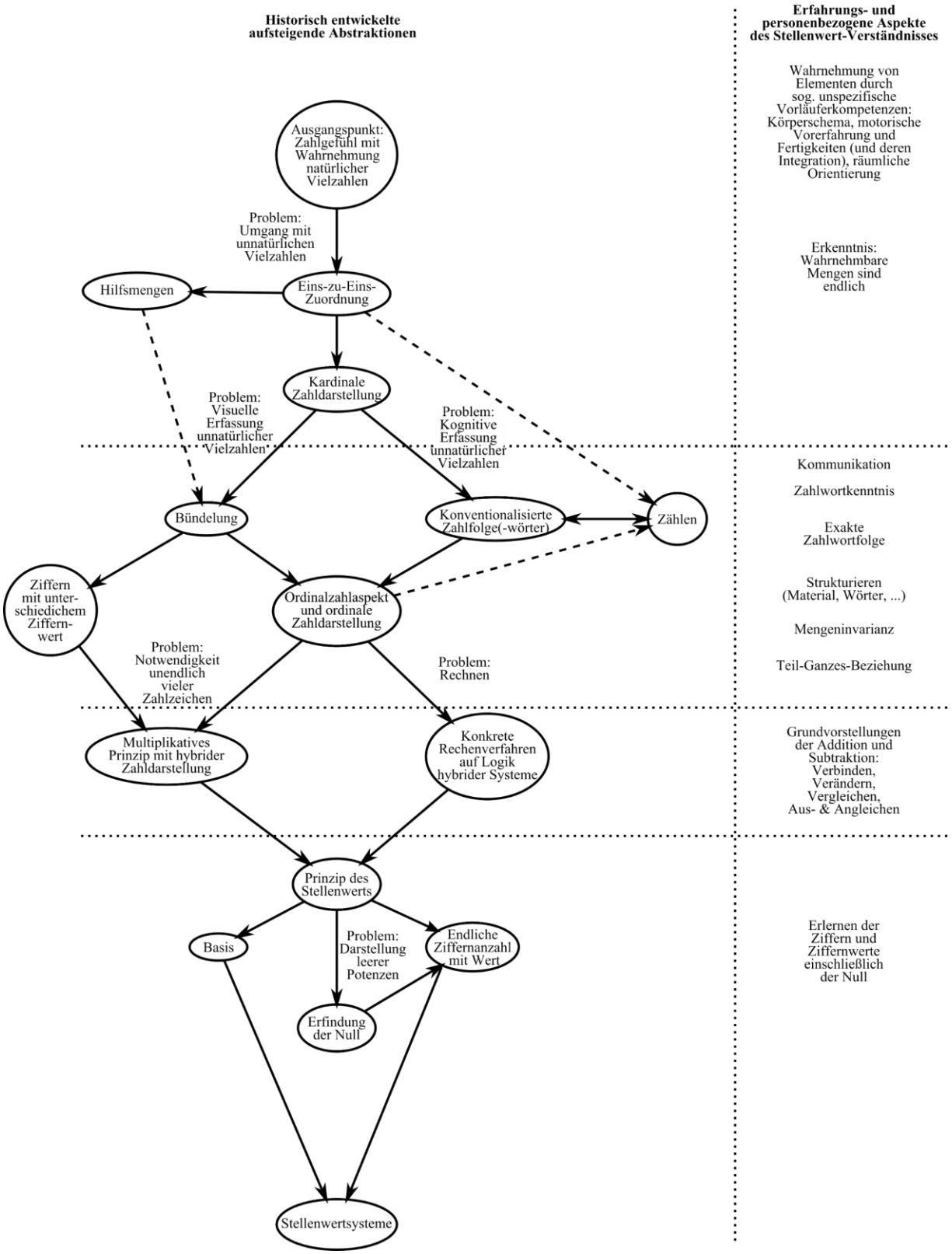

Abb. 10: Verbindung von phylogenetischen Abstraktionen der Zahlentwicklung mit ontogenetischen Voraussetzungen des Erwerbs

Selbstverständlich kann diese Analyse angesichts der langen Forschungsbemühungen und angesichts der Begrenzung der vorliegenden Arbeit nur eine unvollständige Annährung bleiben. Hervorzuheben ist an dieser Stelle, dass im kultur-historischen Sinne versucht wurde, die phylogenetisch entstandenen aufsteigenden Abstraktionen hinsichtlich der ontogenetischen Voraussetzungen zu hinterfragen, um so im Dienste eines möglichst basalen Zugangs und einer tatsächlichen Betrachtung der in die Mittel eingegangenen Abstraktionen die Tatsache, dass Kinder bereits früh mit komplexen kulturhistorischen Mitteln konfrontiert sind, auszublenden. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die individuellen Vorerfahrungen und Sinngebungen der Lernenden anders als in dieser fachlichen Analyse zwischen Phylo- und Ontogenese in der didaktischen Gestaltung auszublenden sind – das Gegenteil muss der Fall sein.

2.5 Reflexion der didaktischen Modelle, Konzepte und Methoden (Schwarzenberg)

Im Folgenden werden ausgewählte Aspekte der Didaktik der Mathematik vorgestellt. Aufgrund der Relevanz von Lehrplänen und Bildungsstandards auf der makrostrukturellen Ebene von Unterricht und die darin eingebundene Forderung nach entdeckendem und handlungsorientiertem Mathematikunterricht, erscheint die Auseinandersetzung mit dem entdeckenden Lernen nach Heinrich Winter adäquat.

Mit der Durchsetzung einer zunehmend konstruktiven Perspektive auf das Lernen erfahren auch innerhalb der Mathematikdidaktik offene und handlungsorientierte Unterrichtsangebote und die somit veränderte Rolle von Lehrpersonen Aufmerksamkeit (vgl. Lorenz 2003, 13). Folgt man Inge Schwank (2013b), so kann beobachtet werden, dass „die Mathematik eher als die Lehre von Mustern [gegenwärtig; P.S.] unterrichtet wird und nicht als die *Lehre der Entstehungsgeschichte von Mustern.*“ (ebd., 175) Dies ist insofern als spannend zu bewerten, da dies gerade im Kontext von entdeckendem Lernen anschlussfähig ist sowie auch aus kulturhistorisch geprägter Sicht eine ergiebige Haltung zu sein scheint – dies wird im Anschluss an das Kapitel ausführlich diskutiert werden.

Im weiteren Verlauf wird der Schwerpunkt der Betrachtung eher auf mathematische Konzepte als dezidiert auf Methoden gelegt; diese Entscheidung ist dem beschränkten Umfang der Arbeit geschuldet.

Da mathematisches Lernen und Mathematik im Allgemeinen durch das Verstehen von und Umgehen mit ihren Begriffen abhängig ist, soll die individuelle Begriffsbildung Berücksichtigung finden. Durch den entdeckenden Erwerb von Begriffen und ihren Verwendungsmöglichkeiten kommt es gleichzeitig zu einem Aufbau von mathematischer Fachsprache sowie dem Formalismus der Mathematik, was wiederum im Prozess fortschreitender Schematisierung und Mathematisierung des eigenen Vorgehens und Verstehens Niederschlag finden kann. Eine weitere Forderung, die an den Mathematikunterricht gestellt wird, ist, dass Inhalte wiederkehrend über die gesamte Schullaufbahn aufgegriffen und vertieft werden. Dies lässt einen Rückgriff auf Jerome S. Bruners Ausführungen zum spiralcurricularen Unterricht entlang fundamentaler Ideen als geeignet erscheinen. Da J.S. Bruner innerhalb seiner Überlegungen auch zwischen drei verschiedenen Anschauungsformen unterscheidet, die gegenwärtig als Maßnahmen der inneren

Differenzierung diskutiert werden, werden diese kurz einbezogen. Die Überlegungen von Inge Schwank zum Zurechtlegen und Denken entlang zweier grundsätzlicher Betrachtungsformen sollen ebenfalls kritisch in die Darstellungen einbezogen werden sowie ihre Überlegungen zum Verhältnis von Gegenstand und Vorstellung innerhalb des mathematischen Lernens.

Diese leitenden Gedanken der Mathematikdidaktik werden nun im Folgenden skizziert, mit ausgewählten weiteren Perspektiven angereichert und miteinander in Beziehung gesetzt. An dieser Stelle ist zu bemerken, dass im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur ein Auszug ausgewählter mathematikdidaktischer Aspekte dargestellt werden kann.

2.5.1 Entdeckendes Lernen und Begriffsbildung im Mathematikunterricht (Schwarzenberg)

Der Unterricht im Fach Mathematik setzt die Notwendigkeit voraus, mathematische Begriffe zu erwerben, zu verstehen und auszudifferenzieren. Durch eine Orientierung an einem konstruktivistisch geprägten Lehr-Lern-Verständnis erfolgt gegenwärtig innerhalb der Didaktik der Mathematik eine Abkehr von einer rezeptiven Auffassung. Das Erscheinen von „The Process of Education“ (Bruner 1977) hat maßgeblich Ausschlag für die Ausarbeitung des entdeckenden Lernens nach H. Winter gegeben. (vgl. Phi Delta Kappa Internationalist 1971, 18; vgl. Winter 1983, 1995, 2016; vgl. Ratz 2009)

Die konstruktivistische Orientierung sowie die Orientierung am entdeckenden Lernen kommt auch in den Bildungsstandards der KMK sowie den Lehrplänen für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen für das Fach Mathematik zum Ausdruck und stellt dementsprechend Herausforderungen an die Unterrichtsgestaltung. Dies sollte bereits bei den Betrachtungen der makrostrukturellen Ebene der MRD deutlich geworden sein.

Diese Orientierung innerhalb der Empfehlungen und Lehrpläne lässt es begründet erscheinen, sich sowohl mit konstruktivistischen Auffassungen innerhalb der Mathematikdidaktik auseinanderzusetzen als auch das entdeckende Lernen zu thematisieren.

Die Schwerpunktsetzung auf den Erwerb und die Bestimmungsformen von Begriffen lässt sich dadurch begründen, dass mathematisches Lernen an den Erwerb von Begriffsvorstellungen geknüpft ist und Begriffe in Verzahnung mit inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen gedacht

werden können. Die Verbindung dieser beiden Kompetenzbereiche wird auch durch das Konzept der fortschreitenden Schematisierung und Mathematisierung innerhalb entdeckendes Lernens deutlich und wird demnach nach den Ausführungen zum entdeckenden Lernen und der Begriffsgenese einbezogen.

Die inhaltliche Klärung des Terminus *Begriff* erfolgt vor allem unter Rückgriff auf die Ausführungen Heinrich Winters (1983) zur mathematischen Begriffsbildung durch das entdeckende Lernen. Unter *entdeckendem Lernen* versteht er

> ein theoretisches Konstrukt, die Idee nämlich, dass Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und die Ertüchtigung in Problemlösefähigkeiten nicht schon durch Information von außen geschieht, sondern durch eigenes aktives Handeln unter Rekurs auf die schon vorhandene kognitive Struktur, allerdings in der Regel angeregt und somit erst ermöglicht durch äußere Impulse. (ebd., 3)

J.S. Bruner hat sich innerhalb seiner Forschungsarbeiten mit fundamentalen Ideen von Fächern und Wissenschaftsbereichen auseinandergesetzt und gefordert, entlang dieser fundamentalen Ideen spiralcurriculare Lehrpläne zu entwickeln und hieran die Unterrichtspraxis auszurichten – diese Ausführungen werden im Folgenden einbezogen und mit den Auffassungen von Inge Schwank in Beziehung gesetzt.

Als *Beitrag zur Allgemeinbildung* durch den Mathematikunterricht sieht Heinrich Winter (1995) folgende Grunderfahrungen als zentral an, die Lernenden durch Unterricht ermöglicht werden sollen:

> (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
> (2) Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bilder und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
> (3) In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben. (37)

Demnach wird mathematische Bildung als Teil einer Allgemeinbildung gedacht sowie als Umgang mit Grunderfahrungen. Insgesamt werden diese Ausführungen H. Winters durch die formalen Bildungsaspekte (v.a. in Punkt (3)) und die materialen Bildungsaspekte (v.a. Punkt (1)) nach W. Klafki angereichert. Er sieht eine Abhängigkeit vom materialen und formalen Bil-

dungsanspruch der Mathematik in der individuellen Begriffsbildung (v.a. in Punkt (2)). Die Begriffsbildung steht in einem wechselseitigen Verhältnis zu den anderen beiden Punkten, da verständiger Gebrauch von Mathematik und ihren Mitteln sowie der Aufbau von Wissensnetzen begriffsgebunden sind. (vgl. ebd., 39ff.) Jedem Lernenden und jeder Lernenden soll die Einsicht zugänglich werden, „daß Menschen imstande sind Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen." (ebd., 39) In diesem Punkt wird bereits deutlich, dass H. Winter die Begriffsbildung für keinen isolierten Akt hält und demnach keine einfache additive Vermehrung von Wissen und Können durch Unterricht erzeugt werden kann, sondern dass es sich um einen individuellen konstruktiven Prozess handelt (vgl. Winter, 1983, 180f.).

Bereits in den 1980er Jahren hat sich H. Winter für einen entdeckenden Mathematikunterricht eingesetzt, wobei er den Lernenden bzw. die Lernende als in einem schöpferischen Prozess handelnd befindlich ansieht (vgl. ebd. 186). Er nimmt an, „Begriffe müssen entdeckt, Definitionen nacherfunden werden" (ebd,, 181) sowie dass der mathematische Begriffserwerb in qualitativen Sprüngen verläuft, demnach kein linearer und quantitativ zu beschreibender Prozess ist und interessens- und motivationsgebunden ist (vgl. ebd., 177, 181f.). Hierbei orientiert er sich an Jean Piagets Lern- und Entwicklungsverständnis und einer Didaktik nach Wolfgang Klafki, bezieht aber auch durchaus auch Überlegungen Lew Vygotskijs und Vasily Davydovs ein. Er charakterisiert die Begriffsentwicklung durch „Fortschritte hinsichtlich Allgemeinheit, Bewußtheit […], Beziehungsreichtum mit anderen Begriffen, Beweglichkeit in Anwendungen, sprachlicher Präzisierung und schließlich hinsichtlich Reflektiertheit" (ebd., 182).

Im Folgenden werden die Ausführungen H. Winters zur Entwicklung und Bestimmung von Begriffen nachvollzogen. Hierbei werden nicht primär mögliche Überlegungen für die Gestaltung des Mathematikunterrichts nachvollzogen, vielmehr soll grundlegend geklärt werden, was unter der Begriffsentwicklung und -bildung von H. Winter verstanden wird. Ausführungen zum Erwerb von Begriffsverständnis werden nach H.J. Weigand (2015) ergänzt. Diese Ausführungen sollen dann im Folgenden für die Entwicklung des Unterrichts genutzt werden.

2.5.1.1 Elemente der Begriffsentwicklung (Schwarzenberg)

Die *Begriffsentwicklung* wird auf die Stufen

- der Auseinandersetzung mit Phänomenen (vgl. Winter 1983, 182f.),

- der schematisierenden Rekonstruktion von Phänomenen durch mathematische Mittel (vgl. ebd., 183f.),
- der systematischen Einordnung und Integration in Wissensnetze und dem Aufbau von Theoremen (vgl. ebd., 184f.) sowie
- des Transfers auf weitere Phänomene unter Einbezug einer kritisch-reflexiven Haltung auf den gebildeten Begriff (vgl. ebd., 185f.) zurückgeführt.

Dabei hebt H. Winter selbst hervor, dass diese Stufen nicht als rigide aufzufassen, aber dennoch als Betrachtungshilfen für Begriffsbildungsprozesse zu nutzen sind (vgl. ebd., 186). Für die Begriffsentwicklung essentiell hält er neben der Motivation und dem Interesse der Lernenden die handelnde Auseinandersetzung mit herausfordernden und problembehafteten Situationen und demnach mit Material (vgl. ebd., 177).

Die *Auseinandersetzung mit Phänomenen* greift auf Alltagserfahrungen zu und trägt zu der Bildung von Alltagsbegriffen bei. Sie umfasst Beobachtungen, Unterscheidungen, Problemdefinitionen und den Einbezug von Vorwissen. Sie arbeitet vorrangig deskriptiv (vgl. ebd.,182). Hierbei wird hervorgehoben, dass aber auch bereits die Alltagserfahrung und -begriffsbildung theoriegeprägt sind, da „[w]ir […] ja nur das [sehen; P.S.], wofür wir schon ein Vorwissen mitbringen." (ebd., 183)

Eine operative und instrumentelle Ausrichtung wird durch die *Rekonstruktion des Phänomens* durch Simulation dadurch erzeugt, dass beispielsweise mit Zeichnungen, zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln und mit dem Aufbau von Handlungssystemen und Verfahrensweisen das Ausgangsphänomen verändert wird. Hierbei kommen ikonischen und symbolischen Darstellungsformen Bedeutung zu und durch die Rekonstruktion wird weiter von der beobachteten Wirklichkeit durch Modellbildung abstrahiert. Hierbei steht das erzeugte Modell in einer veränderten Qualität in Korrespondenz mit dem Ausgangsphänomen. (vgl. ebd., 182ff.)

Hieran schließt sich die *Systematisierung* an, wobei ein „[s]ystematisch-theoretisches Verständnis von Begriffen" (ebd., 182) entsteht und die mathematischen und wissenschaftlichen Begriffe entstehen. Die Stufe ist dadurch charakterisiert, dass die gebildeten Begriffe in ein Netz bestehender Begriffsstrukturen einbezogen werden sowie dass Theoriestücke aufgebaut werden, wobei „Theoreme als Antworten auf Probleme zu formulieren" (ebd., 184) sind. Durch den Begriffsaufbau entwickelt sich die mathematisch-wissenschaftliche Fachsprache. Die Stufe der

Systematisierung „setzt nicht nur die beiden anderen [, die der Auseinandersetzung mit und die der Rekonstruktion von Phänomenen, P.S.] voraus, sie setzt diese auch fort und verbessert sie rückwärtsgewandt“ (ebd., 185) im Begriffserwerb.

Die letzte Stufe der Begriffsentwicklung setzt sich mit dem *Transfer und der Reflexion des gebildeten Begriffs* auseinander (vgl. ebd., 182). Durch den Aufbau einer kritischen Distanz zum neugebildeten Begriffen soll ein Beitrag zum Erwerb von Metakognition geleistet werden, sodass gleichzeitig methodisch-strategisches Wissen und Wissen über das Wissen ausgebaut werden (vgl. ebd., 185). Die Reflexion über den Begriff und Überlegungen zur Anwendbarkeit des Begriffs in anderen Kontexten in Fach und Wirklichkeit tragen zu einem vertieften Verständnis bei (vgl. ebd., 185f. mit Referenz auf Vygotskij). Hierdurch „wird versucht, die verstandesmäßige Erfassung von Begriffen zu einer vernunftgemäßen, weisen Einbindung in die menschliche Existenz zu überformen.“ (ebd.)

2.5.1.2 Elemente des Begriffsverständnisses (Schwarzenberg)

Aspekte, die sich einem mathematischen *Begriffsverständnis* zuordnen lassen, stellen nach H.J. Weigand (2015)

- der Begriffsinhalt,
- der Begriffsumfang,
- das Begriffsnetz,
- der Umgang und das Operieren mit Begriffen sowie
- die kritische Reflexion der gebildeten Begriffe dar (vgl. ebd., 264).

Unter den *Begriffsinhalt* fällt das Verständnis des Begriffs entlang seiner Merkmale, Eigenschaftsbeziehungen sowie einer prototypischen, mentalen Grundvorstellung. Hierbei werden fachsprachliche Kompetenzen erworben und Handlungen werden „mit realen, bildlichen, symbolischen oder auch lediglich gedanklich vorgestellten Objekten ausgeführt“ (ebd., 265) sowie verbalisiert. Es kann das Begriffsverständnis hinsichtlich einer prozess- oder eigenschaftsorientierten Sichtweise ausdifferenziert werden – ähnlich wie es in den Modi des Zurechtlegens nach I. Schwank skizziert werden wird – oder des Begriffs als Objekt auf der einen Seite und auf der anderen als nützliches Werkzeug – was vor allem einer kulturhistorisch geprägten Sichtweise entsprechen kann. (vgl. ebd., 264f.)

Der *Begriffsumfang* hingegen fokussiert auf das Verständnis „über die Gesamtheit aller Objekte […], die unter einem Begriff zusammengefast werden“ (Weigand 2015, 264) und gibt somit eine Menge an (vgl. ebd., 265f.).

Die Beziehung zwischen dem gebildeten Begriff zu anderen Begriffen wird durch die Vorstellung eines *Begriffsnetzes* gebildet (vgl. ebd., 264). Das Begriffsnetz zeichnet sich neben der Einordnung eines Begriffs in ein Begriffssystem durch die subjektive Schöpfung der betrachtenden und handelnden Person in ihrem Kontext aus (vgl. ebd., 266f.).

Der *Umgang und das Operieren mit den gebildeten Begriffen* bedarf prozessbezogener Kompetenzen bei der Handlungsrealisierung, exemplarisch beim Problemlösen (vgl. ebd., 264). Die Begriffsanwendung umfasst Konstruktions- und Anwendungskompetenzen im Umgang mit einem Begriff, wobei dieser eine Lösung eines Problems, ein Hilfsmittel zur Lösung oder als Quelle einer neuen Problemstellung sein kann. Durch den Einsatz eines Begriffs in verschiedenen Facetten des Problemlöseprozesses können Begriffsvorstellungen sowie Begriffsnetze ausdifferenziert und der *kritischen Reflexion* unterworfen werden (vgl. ebd., 266f.).

2.5.1.3 Formen der Begriffsbestimmung (Schwarzenberg)

Des Weiteren unterscheidet H. Winter (1983) sechs Formen der *Begriffsbestimmung*, wobei er keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Disjunktheit dieser Formen erhebt. Diesen Ausführungen liegt die Annahme zugrunde, dass die Art der Begriffsbestimmung den realisierten Unterricht bedingt und somit das Lernen der Schüler und Schülerinnen. Gleichzeitig kann die Art der Begriffsbestimmung Auskunft über die bisherige Begriffsentwicklung geben. (vgl. ebd., 186f.) Unterschieden werden die

- exemplarische,
- konstruktive,
- abstraktive,
- ideative,
- explizit-definitorische und
- implizit-axiomatische Begriffsbestimmung (vgl. ebd., 186f.).

Auch H.J. Weigand (2015) setzt sich mit der Begriffsbestimmung in Anlehnung an H. Winter auseinander, wobei er nur auf drei Formen der Begriffsbestimmung eingeht, nämlich der

Exemplarität, Abstraktion und Spezifikation aus einem Oberbegriff (vgl. ebd., 268f.). H. Winter folgend ist die ideative Begriffsbestimmung in der Mathematik diejenige mit der weitesten Verbreitung (vgl. Winter 1983, 191). Gleichzeitig setzt er sich dafür ein, „die Buntheit der Möglichkeiten [des schulischen Lernens; P.S.] anzuerkennen und didaktisch zu nutzen. Begriffe müssen auf mehrere wesentlich verschiedene Arten erfahren werden." (ebd., 196)

Bei der *exemplarischen Begriffsbestimmung* überwiegt die Ausbildung von Begriffen des Alltages, die der sprachlichen Unterscheidung dienen sowie die Lebensumwelt zu ordnen beginnen. Besonderes Interesse erfährt die Apprehension, die als das „Erfassen eines allgemeinen Sachverhalts in einem wirklich repräsentativen, paradigmatischen Beispiel" (ebd., 188 mit Referenz auf Freudenthal und Hervorhebung im Original) umfasst. Als Gegenstück wird die Komprehension hervorgehoben, wobei nicht ein Sachverhalt, sondern mehrere das Verstehen bedingen und demnach das einzelne Beispiel weniger Aussagekraft innehat als bei der Apprehension. H.J. Weigand (2015) folgend, ist diese Art der Begriffsbestimmung durch Ganzheitlichkeit der Anschauung geprägt (vgl. ebd., 268). Hierbei ist für den Mathematikunterricht die tätige Auseinandersetzung von Lernenden mit Gegenständen von Bedeutung, das Erleben von Aha-Effekten im Umgang mit Material sowie die Verortung des mathematischen Begriffs in der Fülle von (Alltags-)Erfahrungen (vgl. Winter 1983, 187f.).

Die *konstruktive Begriffsbestimmung* geht mit Tätigkeiten einher durch die mittelbar etwas produziert wird; exemplarisch durch Rekonstruktion des beobachteten Phänomens durch „ein generelles Verfahren […], das die Dinge, die unter den Begriff fallen, herstellt." (ebd., 189) Hierbei liegt die Annahme zugrunde, dass selbstverrichtete Tätigkeiten besser erinnert werden und in Folge dessen wird die Reflexion über die Anwendung verschiedener Arten von Tätigkeiten als relevanter erachtet als die Tätigkeit an sich. Es kann bei der konstruktiven Begriffsbestimmung zu rekursiven Prozessen kommen bei denen regelhaft von einer Ausgangssituation weitergearbeitet wird. (vgl. ebd., 188f.)

Die *abstraktive Begriffsbestimmung* basiert auf den (Vor-)Erfahrungen der Lernenden und trägt zur Klassifizierung von Gegenständen bei. Dies kann entlang der am Gegenstand verrichteten Handlungen geschehen, wie dem Vergleichen oder Messen. Es ist unumgänglich hierbei nicht nur die Vorerfahrungen der Lernenden einzubeziehen, sondern sie (erneut) erlebbar zu machen. Denn von den betrachteten Gegenständen werden innerhalb dieser Begriffsbestimmungsform

eine oder mehrere Eigenschaften abstrahiert und mit ihnen wird weitergearbeitet, sodass die restlichen Eigenschaften in den Hintergrund treten. (vgl. ebd., 189ff.)

Bei der *ideativen Begriffsbestimmung* hingegen wird „in ein Ding eine gewisse Eigenschaft“ (ebd., 191) hineingesehen, sodass sie bei der Betrachtung des Gegenstandes konstruiert wird. Hierbei kommt es zu Idealisierungsprozessen, die Kreativität und Vorstellungskraft erfordern, da diese Eigenschaft der Dinge als solche nicht existiert (vgl. ebd., 191ff.). H. Winter verweist an dieser Stelle auf Ausführungen Dawydows zur Gestaltung eines Mathematikunterrichts, der mit ideativer Begriffsbestimmung arbeitet (vgl. ebd., 193 mit Referenz auf Dawydow).

Unter der *Begriffsbildung durch Abstraktion* nach H.J. Weigand (2015) werden die rekonstruktive, abstraktive und ideative Begriffsbestimmung H. Winters zusammengefasst, da durch verschiedene Prozesse der Abstraktion mentale Modelle entstehen, die durch das Absehen oder das Hineinsehen von bestimmten Eigenschaften in Gegenstände abstrahiert werden oder im Falle von Rekonstruktion die zugrundeliegende Beschaffenheit des betrachteten Gegenstandes verändern (vgl. ebd., 268).

Bei der *explizit-definitorischen Begriffsbestimmung* werden von Oberbegriffen charakterisierende Eigenschaften abgeleitet und der Oberbegriff mithilfe dieser Eigenschaften definiert. Dabei erfahren die Eigenschaften mehr Aufmerksamkeit als der Oberbegriff. Diese Begriffsbestimmungen sollen für die Lernenden als freie, aber sinnvolle Übereinkünfte nachvollzogen, nachentdeckt und anerkannt werden – auch unter Beachtung kontrastierender möglicher Definitionen und ihren Konsequenzen. Definitionen sollen demnach nicht bloß als Abkürzungen erlebt werden, sondern als sinnvoll (vgl. Winter 1983, 193ff.). Diese Form der Begriffsbestimmung entspricht der *Spezifikation aus Oberbegriffen* bei H.J. Weigand (2015, 268).

Implizit-axiomatische Begriffsbestimmungen erfahren nicht weiter vertiefende Betrachtung, da sie als weniger relevant für schulische Bildungsprozesse angesehen werden (vgl. Winter 1983, 195). Innerhalb dieser Form der Begriffsbestimmung soll es darum gehen, einen maximal großen Grad der Verallgemeinerung und der deduktiven Durchgliederung von größeren mathematischen Theoriekomplexen zu erzeugen unter Rückgriff auf Axiome und einer Formalisierung auf höherer Stufe. Diese Form der Begriffsbestimmung ist in Wissenschaft und Universität verbreitet (vgl. ebd., 195f.).

2.5.1.4 Begriffsentwicklung, -verständnis und -bestimmung (Schwarzenberg)

Zusammenfassend ergibt sich also, dass die „Definitionen inhaltlicher Begriffe […] nicht schlicht als Abkürzungen erfahren werden [dürfen; P.S.]“ (Winter 1983, 194), sondern als sinnhaft von den Lernenden erlebt und nachvollzogen werden müssen, sodass bspw. durch die Verwendung des Begriffs entstandene Verschlankung ein Nebeneffekt der Begriffsbildung ist (vgl. ebd.). Für die didaktische Gestaltung von Unterricht wird abgeleitet, Begriffe auf verschiedene Arten erfahr- und erlebbar zu machen und sie in echte Problemzusammenhänge einzubetten, denn „[w]enn der Begriffserwerb nicht im Zusammenhang steht mit der Lösung von Problemen, dann ist er gar nicht zu rechtfertigen.“ (ebd., 197) Demnach werden Begriffe als Instrumente gedacht, um Unterricht zu strukturieren und zu organisieren. Gleichzeitig unterstützten Begriffe in Auseinandersetzung mit problembehafteten Situationen den Unterrichtsgegenstand zunehmend präziser zu durchdringen, Vorstellungen aufzubauen, in Begriffsnetzte zu integrieren oder aufzubauen sowie Transfer- und Reflexionsleistungen zu entwickeln (vgl. ebd.). Die ersten vier Formen der Begriffsbestimmungen nach H. Winter, also die exemplarische, konstruktive, abstraktive und ideative, sind tendenziell eher den ersten beiden Stufen der Begriffsentwicklung, der Auseinandersetzung und Rekonstruktion von Phänomenen zuzuordnen. Während die explizit-definitorische und die implizit-axiomatische Begriffsbestimmung eher der Entwicklungsstufe der Systematisierung zuzuordnen sind. Hierbei kommt es zu einer Veränderung des Bezugs zur Wirklichkeit und der Verwendung von Sprache. Überwiegt innerhalb der Auseinandersetzung und Rekonstruktion von Phänomen der Wirklichkeitsbezug, so dient die Sprache innerhalb der Begriffsbestimmung hierbei eher der Beschreibung des Wahrgenommenen (vgl. ebd., 187). Innerhalb der definitorischen und axiomatischen Bestimmung spielt die Sprache „nicht nur eine beschreibende Rolle, sondern insofern eine tragende, als Zeichen (Wörter, Symbole) geradezu wie die begrifflichen Gegenstände selbst behandelt werden.“ (ebd.)

H.J. Weigand (2015) hebt ebenfalls das „Handeln und Tun als Ausgangspunkt für Begriffsbildungen“ (ebd., 269 mit Hervorhebung im Original) hervor, um dynamische Begriffsvorstellungen anzubahnen. Hierbei sieht er Variationen von, Operationen mit und Handlungen an realen, virtuell-simulierten oder mentalen Gegenständen in aufmerksamkeitsfokussierenden und herausfordernden Situationen als essentiell an, um Beziehungen und Abhängigkeiten von Begriffen zu erkunden und zu verstehen sowie um über die eigene Tätigkeit reflektieren und sprechen zu

können. (vgl. ebd., 268f.) Dies setzt einen entdeckenden und handlungsorientierten Unterricht voraus, in dem die Lernenden Begriffe konstruieren.

Denn insgesamt sind „begriffliche Lösungen eines Problems stärker von Autonomie, Authentizität, Flexibilität und Eleganz geprägt“ (Winter 1983, 197) und genau dies ist ein Ziel, das H. Winters allgemeinbildender Funktion von entdeckendem Mathematikunterricht zugrunde liegen soll. Eine mögliche Gestaltungspraxis für einen solchen entdeckenden und begriffsorientierten Unterricht kann in der fortschreitenden Schematisierung und Mathematisierung gesehen werden.

2.5.2 Fortschreitende Schematisierung und fortschreitende Mathematisierung (Schwarzenberg)

Die fortschreitende Schematisierung und die fortschreitende Mathematisierung gelten in der Mathematikdidaktik als Lehr- und Lernmethode innerhalb derer die Lernenden durch eigene Aktivität in Kooperation kreativ mathematische Problemlösungen in echten herausfordernden Unterrichtssituationen, wie in der Auseinandersetzung mit Sachsituationen, erarbeiten. Hierbei steht das Lösen von Problemen in mathematischen Lernsituationen durch den Einsatz eigener Kompetenzen und des Vorwissens in Kooperation mit den Mitlernenden im Vordergrund. Wichtig dabei ist, dass die Aufgaben eine tatsächliche Herausforderung darstellen, aber weder unter- noch überfordern. Durch die anschließende Präsentation der Vorgehensweisen und Ergebnisse aller Bearbeitungen im Plenum soll Einsicht in grundlegende Prozesse und in geschickte Vorgehensweisen möglich sowie bewusst werden, dass Aufgaben auf verschiedene Weise gelöst werden können. Durch das Vorstellen und Nachvollziehen werden Lernende dazu angeregt andere Vorgehensweisen, wie auch geschickte und ergiebige Vorgehensweisen, im Lösungsprozess anzuerkennen und zu verstehen sowie das eigene Vorgehen zu reflektieren. (vgl. Treffers 1987, 126f.) Dies wiederum bedingt die Schematisierung sowie die Mathematisierung des eigenen Vorgehens in zukünftigen Aufgaben, was beispielsweise das Nutzen von formalisierten Darstellungen oder den Einsatz von Rechenstrategien begünstigen kann. Insgesamt wird die fortschreitende Schematisierung durch die fortschreitende Mathematisierung ergänzt, sodass die Auseinandersetzung mit Lernsituationen eine veränderte Herangehensweise erfährt, diese ist zumeist durch ein höheres Maß an Effizienz im Vorgehen und den Einsatz von formalen Mitteln geprägt, die durch die hohe Eigenaktivität im Unterricht mental durchdrungen

werden. (vgl. Treffers 1993, 96) Lehrpersonen nehmen innerhalb dieses schülerzentrierten Unterrichts eine eher begleitende Rolle ein.

Im Folgenden soll an einem Beispiel skizziert werden, wie reichhaltig und verschieden Lösungsstrategien und Vorgehensweisen von Lernenden bei der Bearbeitung einer Aufgabe sein können. Angenommen die Lernenden beschäftigen sich mit der Erarbeitung multiplikativer Zusammenhänge und die Aufgabe, eine fiktive und eingekleidete Sachaufgabe, laute:

> Der Weihnachtsmann gibt acht seiner Helfer einen Sack mit Geschenken zum Ausliefern. In jedem Sack sind 23 Pakete. Wie viele Geschenke gibt es insgesamt? (vgl. Treffers 1987,127; übersetzt und modifiziert von P.S.)

Geübten Rechnerinnen und Rechnern wird die Bewältigung der Aufgabe durch eine Multiplikation der Form 8×23 leichtfallen, aber auch hierbei können sich vermutlich durchaus Unterschiede im Vorgehen zeigen. So werden einige dieser geübten Personen ein schriftliches oder halbschriftliches Verfahren der Multiplikation anwenden oder die Aufgabe in Teilaufgaben zerlegen – letzteres kommt vor allem beim überschlagenden Kopfrechnen vor. Unwahrscheinlicher erscheint der Rückgriff auf die wiederholte Durchführung von Addition.

Exemplarische halbschriftliche Vorgehen

(a)
$$\begin{aligned} 23 \times 8 &= 184 \\ 20 \times 8 &= 160 \\ 3 \times 8 &= 24 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 23 \times 8 &= 184 \\ 10 \times 8 &= 80 \\ 10 \times 8 &= 80 \\ 3 \times 8 &= 24 \end{aligned}$$

Schriftliches Vorgehen

(c)
$$\begin{array}{r} 23 \times 8 \\ \hline 24 \\ 16 \\ \hline 184 \end{array}$$

Zerlegung in Teilaufgaben

(d) $8 \times 23 = (10 \times 23) - (2 \times 23) = 230 - 46 = 184$

(e) $8 \times 23 = (5 \times 23) + (3 \times 23) = 115 + 69 = 184$

Alle dieser Vorgehensweisen zeichnen sich bereits durch einen hohen Grad der Mathematisierung und Schematisierung aus und verschleiern dadurch den Prozess des Erwerbs von genau diesen.

Adrian Treffers (1987) stellt Lösungen von Lernenden dieser Aufgabe zur Verfügung, die sich von den exemplarischen Überlegungen zuvor signifikant zu unterscheiden scheinen, aber durchaus der Bewältigung der gestellten Aufgabe dienen (vgl. ebd., 128). Exemplarisch sollen einige Elemente der Aufgabenbearbeitung skizziert und nachvollzogen werden. Bei längerem Betrachten wird man jedoch nicht umher kommen, einige geistreiche und kreative Details wahrzunehmen, die die Lernenden zur Problemlösung eingesetzt haben.

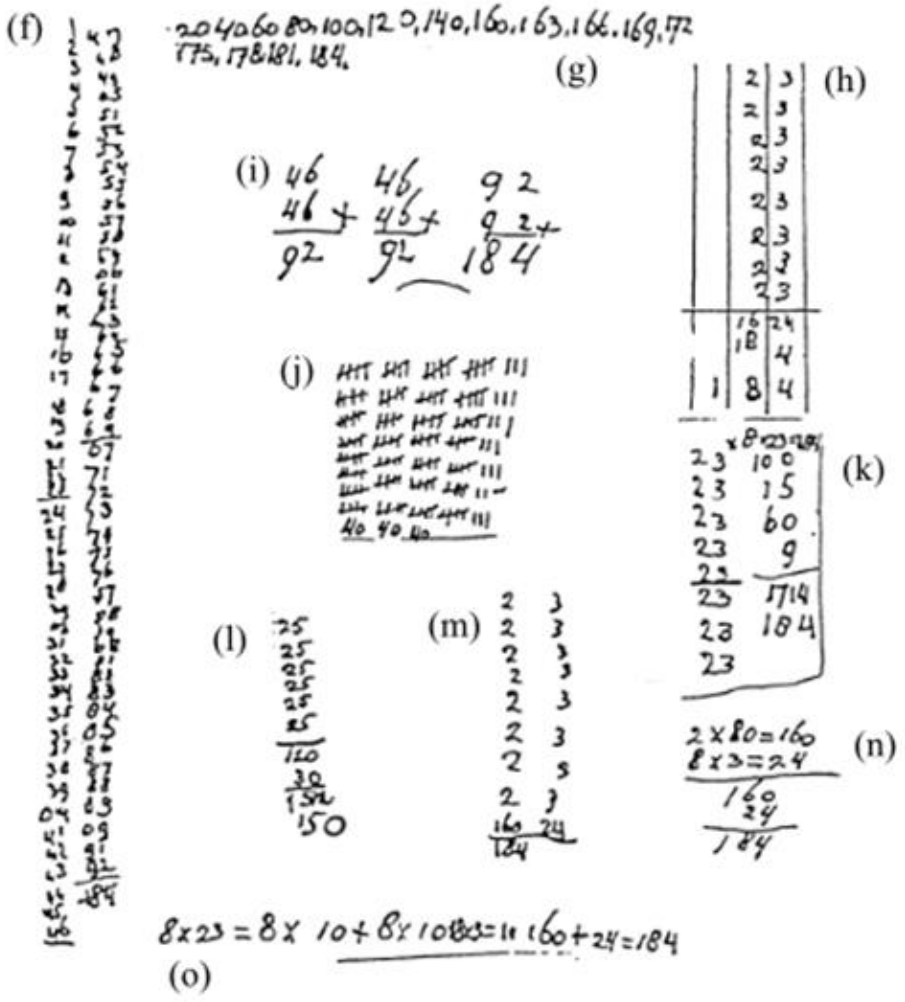

Abb. 11: Unterschiedlich schematische Lösungen der Aufgabe 8x23 (vgl. Treffers 1987, 128)

Beispielsweise ist in (j) eine Fünferbündelung entlang von Strichlisten durchgeführt worden. Es fällt jedoch auf, dass die Striche formal-symbolisch spaltenweise zusammengefasst worden sind, was den Übergang einer Addition in dieser Darstellungsform möglich macht ohne tatsächlich jeden Strich einzeln zählen zu müssen. In (f) wird ebenfalls vorrangig gezählt, erfolgreich von eins beginnend bis 92, wobei die formal-symbolische Zahlnotation durch Markierungen an der jeweils erzählten 23. Stelle viermal unterbrochen wird. Dabei wird geschickt ausgenutzt, dass vier der Hälfte von acht entspricht. Anschließend wird das Gezählte von viermal 23 verdoppelt. Auch in (g) wird geschickt gezählt, indem eine Teil-Ganzes-Relation ausgenutzt wird. Zuerst werden formal-symbolisch die Ergebnisse der wiederholten Addition von 20 achtmal notiert, woran anschließend achtmal drei addiert wird.

Auch die Darstellungen in (i), (h), (k) und (m) nutzen unterschiedlich, aber jeweils geschickt, Teil-Ganze-Relationen zur Problembewältigung aus. In (n) und (o) finden sich bereits halbschriftliche Vorgehen. In (n) fällt auf, dass das Ergebnis richtig ist, aber durch eine Uminterpretation von Stellenwerten bei der Bearbeitung gekennzeichnet ist. Die Bearbeitung in (l) verläuft gemäß der Aufgabenstellung fehlerhaft; es wurde aber dennoch erfolgreich eine Rechnung vollzogen.

Die vorgestellten Bearbeitungen zeichnen sich durch einen unterschiedlichen Grad der Formalisierung und Schematisierung aus. Hierbei fällt deutlich auf, dass die Bearbeitungen unterschiedlich lang sind und die Komplexität der Darstellungen variiert. Eine höhere Fehleranfälligkeit kann angenommen werden, wenn die Darstellung wenig gegliedert und geordnet ist und sie zusätzlich nicht oder in geringem Maße auf den mathematischen Formalismus zugreift. Gleichzeitig zeigen diese Beispiele, eine Vielzahl möglicher Bearbeitungswege auf, die Raum für individuelle Vorgehenspräferenzen zulassen zu scheinen. In der anschließenden Vorstellung und Diskussion können anhand dieser verschiedenen, aber durchaus sinnvollen Formen der Bearbeitungen echte Diskussionen unter den Lernenden entstehen, was die Nachhaltigkeit des Lernens begünstigen kann sowie das Entwickeln eines Verständnisses dafür, warum schematisierende und mathematisierende Darstellungen und Vorgehensweisen Sinn haben und für den Erfolg einer Aufgabenbewältigung Bedeutung haben können.

Das Niveau innerhalb der exemplarischen Aufgabenbearbeitung ist bereits als recht hoch einzustufen, da eine ikonische Abbildung mit Nutzen des Stellenwertsystems als niedrigstes Bearbeitungsniveau angenommen werden kann. Tatsächlich wären aber auch enaktive Bearbeitungen der Aufgabe möglich.

Im Gegensatz zur fortschreitenden Komplizierung werden bei der fortschreitenden Schematisierung und Mathematisierung Aufgaben und Teilschritte der Bearbeitung nicht nacheinander eingeführt, sondern direkt komplexe und herausfordernde Aufgaben gestellt, die aber für die Lernenden zu bewältigen sind (siehe Abb. 11). Des Weiteren werden keine Lösungsalgorithmen instruiert und es wird Freiraum zur Erprobung und Aktivität der Lernenden gegeben. In einem fortschreitend schematisierenden und mathematisierenden Unterricht haben Lernende die Möglichkeit sich frei, aber durchaus begründet, für ihr Vorgehen zu entscheiden (vgl. ebd., 1987, 130). Dies trägt jeweils dazu bei, Lernende zu motivieren und für die Bearbeitung und die Lösungen der Aufgaben zu interessieren. Im Kontext von Inklusion bedeutet dies, dass dieses Vorgehen Raum für natürliche Differenzierung bietet, da Lernende im gleichen Aufgabenbereich tätig sind, aber die verwendeten Mittel sowohl gegenständlicher, ikonischer oder formaler Art sein können und Bearbeitungen dementsprechend auf verschiedene Weise möglich sind und dies anerkannt wird.

2.5.3 Z4-Modell und M4-Modell (Schwarzenberg)

Beide Modelle gehen auf Inge Schwank zurück und verfolgen das Anliegen innere Vorgänge mit äußeren mathematischen Repräsentationen und Ereignissen in Relation zu setzen. Dies gilt zum einen für den Zahlbegriffserwerb und somit beim Aufbau eines Zahlverständnisses im Z^4-Modell und zum anderen im M^4- Modell für den Aufbau von mathematischem Verständnis allgemein. Bei beiden Modellen liegt eine Fokussierung auf die mathematische Frühförderung vor. (vgl. Schwank 2014, 1)

Das *Z^4-Modell* setzt sich mit den Ebenen der internen Vorstellungen, der externen Repräsentationen und der Zwischenebene im Übergangsbereich zwischen innen und außen auseinander. Hierbei wird die Zahlidee als mentales und inneres Konstrukt gedacht, das durch Erfahrungen auf der äußeren Ebene innerhalb der individuellen Lebenswelt durch Zahlidee bezogene Ereignisse ausdifferenziert wird. Diese beiden Ebenen gilt es in Verbindung zu denken. Hierzu werden Zahlzeichen und Zahlwörter als Vermittler gedacht, denen Inge Schwank die Funktion des

Hilfsmittels zuschreibt. Durch die Auseinandersetzung mit Zahlidee bezogenen Ereignissen und dem Umgang mit Zahlzeichen und Zahlwörtern entstehen Wechselwirkungen, die auf das mentale Konstrukt der Zahlidee einwirken. Hierbei kommt es auch zu einer Rückwirkung der mentalen Zahlidee auf den Umgang mit Zahlidee bezogenen Ereignissen sowie im Umgang mit den Hilfsmitteln der Zahlzeichen und Zahlwörter. (vgl. Schwank 2013, 4)

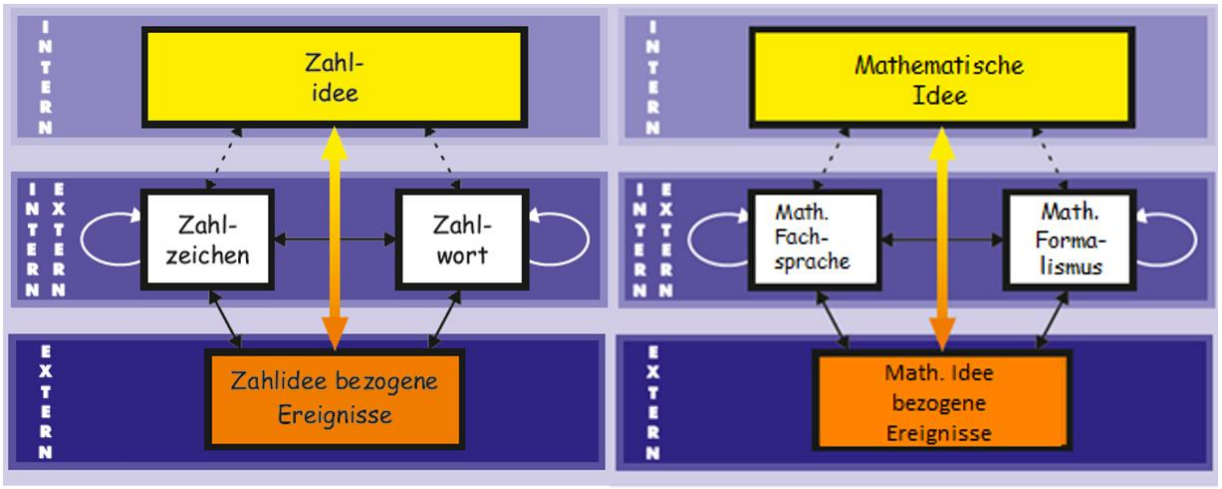

Abb. 12: Z^4-Modell nach Schwank (2013c, 4) und M^4- Modell nach ebd.; modifiziert von P.S

Das M^4- *Modell* weist eine analoge Struktur auf. Es wird die interne Ebene der mathematischen Idee durch mathematische Idee bezogene Ereignisse aufgebaut und entwickelt. Umgekehrt differenziert die mathematische Idee den Umgang mit mathematischen Idee bezogenen Ereignissen aus. Die mathematische Idee referiert auf das Durchdringen von Methoden und Inhalten, die mathematische Idee bezogenen Ereignisse auf den individuellen Erfahrungs- und Wissenskanon. Als Hilfsmittel hierfür befinden sich an der Schnittstelle von externer und interner Ebene der mathematische Formalismus und die mathematische Fachsprache.

Bei den Hilfsmitteln der Zahlzeichen und Zahlwörter sowie des mathematischen Formalismus und der mathematischen Fachsprache besteht die Gefahr, dass diese selbstreferentiell verwendet werden, auch wenn die dahinterliegenden Ideen nicht verstanden oder vollständig durchdrungen sind. Vor allem Zahlzeichen und Zahlwörter können in der Schuleingangsphase häufig unbemerkt selbstreferentiell benutzt werden, was fatale Folgen für das weitere mathematische Lernen bedingen kann. (vgl. Schwank 2013, 95) Bestärkt werden kann diese Sicht indirekt durch die Ausführungen H. Winters (1995) zum Allgemeinbildungsanspruch der Mathematik, vor allem hinsichtlich der formalen Seite. Er hebt die „Mathematik als Schule geordneten Sprechens“

(ebd., 43) hervor, worin er erneut deutlich auf das tiefgehende Verständnis für den betrachteten Inhalt eingeht. Er sieht in der Mathematik die Besonderheit, „daß hier Fehler und Missverständnisse objektiv aufweisbar und kritisierbar gemacht werden können“ (ebd., 42). Dadurch wird die Eigenaktivität des Lernenden gestärkt, da theoretisch nicht das Machtgefälle zwischen Laie und Experte auftreten muss und gleichzeitig die Bedeutung der Reflexion und der reflexiven Haltung im Umgang mit der Mathematik als solchen, ihren Methoden und dem eher materialen eigenen Erfahrungs- und Wissensschatz (vgl. ebd., 42f.). In Referenz auf Hans Freudenthal wird der Ausdruck der *Begriffsvorstellung* von H.J. Weigand (2015) dargestellt, wobei die „*mathematische Tragfähigkeit bestimmter Vorstellungen* […] dabei in enger Beziehung zu den Zielen der Begriffsentwicklung und dem Vorwissen bzw. dem vorhandenen Begriffsnetz zu sehen“ (ebd., 261 mit Referenz auf Freudenthal und Hervorhebungen im Original) ist. Der Ausdruck der „mentalen Objekte“ (ebd. mit Hervorhebung im Original) betont die individuelle Konstruktionsleistung bei der Begriffsentwicklung, die „sprachliche, bildliche und handlungsbezogene Darstellungen umfassen“ (ebd., 261) kann sowie sich durch Flexibilität und Allgemeinheit der Darstellung durch die Orientierung an Prototypen auszeichnen (vgl. ebd., 261f.). Diese Vorstellung der mentalen Objekte kann durchaus als ähnlich zu den mathematische bzw. Zahlidee bezogenen Ereignissen aufgefasst werden.

2.5.4 Funktional-logisches und prädikativ-logisches Zurechtlegen und Denken (Schwarzenberg)

Das Zurechtlegen und Denken entlang funktional- oder prädikativ-logischer Formen kann beim Begriffserwerb im entdeckenden Mathematikunterricht zu einem tiefen Verständnis führen. Innerhalb dieser Perspektive kommt es grundsätzlich zu einer Orientierung auf die Aktivität und die mentalen Handlungen der Lernenden. Hierbei wird also eine entdeckende Haltung oder zumindest ein konstruktiv inspiriertes Lehr-Lern-Verständnis zugrunde gelegt.

Beim prädikativ-logischen und funktional-logischen Zurechtlegen und Denken handelt es sich um zwei grundlegende Modi, um Gegenstände in der Lebensumwelt zu betrachten und zu analysieren und gleichzeitig um eine Art und Weise denkend mit Gegenständen umzugehen. Hierbei geht es darum, mehrere Gegenstände in Relation zueinander zu setzen, sodass der Schwerpunkt der Betrachtung nicht auf isolierten Einzelgegenständen liegt. (vgl. Schwank 2003, 70) Dabei benutzen beide „Sichtweisen jeweils dazu passende Werkzeuge, z.B. Verkettung von

Funktionen die eine [funktional-logische Sichtweise; P.S.] und aussagen- bzw. prädikatenlogische Verknüpfungen die andere.“ (Schwank 2013a, 200)

Beim prädikativ-logischen Zurechtlegen und Denken werden Gegenstände auf Verwandtschaften und Gemeinsamkeiten untersucht und hinsichtlich dieser Eigenschaften geordnet. Das prädikativ-logische Vorgehen dient also als Ordnungskriterium. (vgl. Schwank 2003, 70)

Das funktional-logische Vorgehen hingegen ist darauf ausgerichtet „Elemente durch einen diese Unterschiedlichkeit bewirkenden Konstruktionsprozess“ (Schwank 2003, 70) herzustellen. Hierbei kann es zu einer Verkettung dieser Prozesse kommen. Es wird als notwendig hervorgehoben, mental die Bewegungs- und Konstruktionsprozesse zu vollziehen, da die Anschauung der Objekte statisch ist und die einzelnen Handlungsschritte nicht sichtbar werden lässt. (vgl. ebd., 71f.)

Deutlich werden die Möglichkeiten dieser Formen des Zurechtlegens und Denkens bei der Bearbeitung nachfolgender Matrix. Menschen unterscheiden sich dahingehend, „ob sie bei solchen Aufgaben eher eine funktionale oder eine prädikative Sichtweise einnehmen.“ (Schwank 2013a, 200) Hierbei können Geschlechtsunterschiede festgestellt werden, sodass weibliche Personen zu einer prädikativen Perspektive tendieren, männliche hingegen eher zu einer funktionalen (vgl. ebd., 201; vgl. ebd. 2013b, 16f.). Im Rahmen einer Diagnostik zu mathematischen Kompetenzen eines Lerners bzw. einer Lernerin wird von I. Schwank (2008) vorgeschlagen, diese beiden Modi des Zurechtlegens einzubeziehen (vgl. ebd. 177) – exemplarisch entlang der in Abb. 13 gezeigten figuralen Matrix, die entlang beider Modi gelöst werden kann.

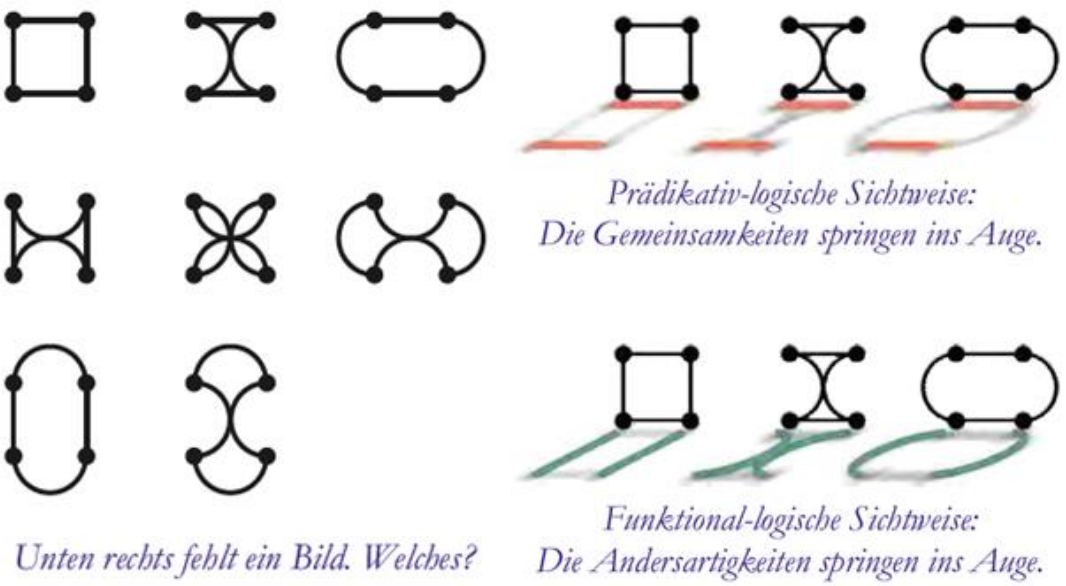

Abb. 13: funktional- und prädikativ-logisch lösbare 3x3-Matrix nach Schwank (2013c, 3).

Insgesamt konstatiert Inge Schwank, dass innerhalb des schulischen Eingangsunterrichts und in Schulbüchern prädikative Darstellungen favorisiert werden und diese demnach diesem Denkmodus entgegenkommen. Dies sieht sie teilweise darin begründet, dass die Darstellung von funktionalem Zurechtlegen aufgrund der Prozesshaftigkeit erschwert ist. Ihr Ansatz besteht darin, Rechenlandschaften in den (Erst-)Unterricht aufzunehmen, sodass funktionale Zusammenhänge tatsächlich handelnd erlebt werden können. (vgl. Schwank 2003, 76f.)

Für diese Arbeit von besonderem Interesse ist, dass Inge Schwank das prädikativ-logische Vorgehen auf von ihr als invariant Bezeichnetes zurückführt und das funktional-logische Zurechtlegen und Denken als Werdendes konzipiert (vgl. Schwank 2003, 70f.). Gleichzeitig hebt sie die Bedeutung von Aktivität und Handeln (v.a. beim funktional-logischen Denken; hier ist sogar die Rede von Tätigkeit) hervor sowie der Sprache (v.a. beim prädikativ-logischen Denken) und des begrifflichen Denkens (vgl. Schwank 2003, 72; 75). Dies entspricht nicht einer kulturhistorischen Auffassung der Begrifflichkeiten.

Dieses Bestreben scheint anschlussfähig an entdeckendes Lernen, das zur Begriffsentwicklung beitragen soll. Ebenfalls kann das Verfügen über verschiedene Modi des Zurechtlegens dazu beitragen, dass innerhalb des Prozesses der fortschreitenden Schematisierung und Mathemati-

sierungen Einsichten in effizientere und formalere Vorgehen möglich und selbst handelnd umgesetzt werden. Durch funktional-logisches Denken kann die Transformation von Mengen durch Operationen, wie beispielsweise Additions- oder Divisionsaufgaben, besser nachvollzogen werden, weil der ordinale Zahlaspekt innerhalb dieses Modus besonders deutlich und erlebbar ist.

2.5.5 Fundamentale Ideen, Spiralcurriculum und Anschauungsebenen (Schwarzenberg)

Nach den vorausgegangenen Ausführungen zum entdeckenden Lernen, zu der Begriffsbildung, zu Vorstellungen des mentalen Zurechtlegens sowie zur fortschreitenden Schematisierung und Mathematisierung, scheint die Frage interessant, wie mathematikdidaktisch begründet Inhalte und damit verwoben Begriffe ausgewählt werden sollen. Hierzu scheint ein Rekurs auf Jerome S. Bruner gewinnbringend zu sein.

Die Ausführungen von J.S. Bruner zu fundamentalen Ideen eines Fachs oder einer Disziplin, seiner Forderung nach spiralcurricularem Aufbau von Unterrichtslehrgängen und der Auseinandersetzung mit verschiedenen Repräsentationsformen gehen zeitlich den Ausführungen H. Winters zum entdeckenden Lernen voraus. Da heute noch die Orientierung an den drei verschiedenen Repräsentationsformen von Lerngegenständen im Unterricht und bei der inneren Differenzierung Bedeutung haben (vgl. de Vries 2014, 24ff.) und die Forderungen nach einem spiralcurricularen Unterrichtsaufbau entlang fundamentaler Ideen nicht überholt sind, werden im Folgenden Auszüge aus J.S. Bruners Werk vorgestellt und in Bezug zu den vorausgegangenen Schilderungen gesetzt.

Das sog. EIS-Prinzip geht originär auf Jerome S. Bruner (1977) zurück. Nach Inge Schwank (2008) werden enaktive, ikonische und symbolische Darstellungsmodi bei J.S. Bruner unterschieden. Beim Enaktiven werden Ideen „im handelnden Umgang in der gegenständlichen Umwelt erschlossen und kommuniziert." (ebd., 174 mit Referenz auf Bruner) Ikonisch hingegen werden Ideen „anhand von Abbildungen erschlossen und kommuniziert" (ebd.) und symbolisch werden sie „anhand von Symbolen erschlossen und kommuniziert." (ebd.)

Gleichzeitig wird von I. Schwank deutlich hervorgehoben, dass die drei Repräsentationsformen nach J.S. Bruner in keinem hierarchischen Verhältnis zueinander-, sondern vielmehr erwachsenen Personen nebeneinander zur Verfügung stehen und dies sich von Kindheit an entwickelt. Hieran sieht sie kritisch, dass in der Grundschule vor allem symbolische und ikonische Repräsentationsformen Relevanz haben, was vor allem für Lernende, denen das enaktive Zurechtlegen schwerfällt, von Nachteil ist. (vgl. ebd., 174f.) Wolfgang Lamers und Norbert Heinen (2006) sehen die Notwendigkeit, die von J.S.Bruner formulierten Repräsentationsebenen, um eine affektiv-emotionale zu erweitern (vgl. ebd., 158). Diese Forderung wird in der Herleitung der Elementarisierung als Bildungsformat für Lernende, denen schwere Behinderungen zugeschrieben werden, erarbeitet.

Kritisch hebt I. Schwank (2008) hervor, dass bei J.S. Bruners Betrachtungen nicht zwischen internen und externen Repräsentationsformen unterschieden werde. Für sie bedeutet dies, dass keine Differenzierung zwischen Vorstellungen und Darstellungen vorgenommen wird und fordert dementsprechend die Erweiterung der drei Darstellungsmodi um die Perspektive der Denkmodi – eine Orientierung und Begründung, die diese Denkrichtung unterstützen ist im Vorstellen des Z^4-Modells und des M^4-Modells vorgestellt worden. (vgl. ebd., 174f.) Auch Heinrich Winter (1983) setzt sich kritisch mit dem Verhältnis von Anschauung und Begriffsbildung auseinander und warnt davor ein dichotomes Verhältnis anzunehmen. Vielmehr hebt er hervor, dass „[w]eder das begriffliche Denken noch das anschauliche Erfassen [...] im historischen und individualgenetischen Sinn konstante Größen“ (ebd., 199) sind, sondern dass sie in Wechselwirkung zueinanderstehen und dementsprechend für schulische Lernprozesse nutzbar gemacht werden sollten. (vgl. ebd.) Hans Freudenthal (zit. nach H.J. Weigand 2015) grenzt innerhalb des individuellen Begriffserwerbs das Moment der Ausbildung mathematischer Begriffsvorstellungen auf Basis der Konstruktion mentaler Objekten durch subjektive Tätigkeit ab. Dadurch bezieht er die phänomenologische Perspektive auf die Tragfähigkeit von entstehenden mathematischen Vorstellungen ein, wobei die entstehenden mentalen mathematischen Objekte durch mathematisches Vorwissen sowie Alltagswissen bereits angereichert sein können, sodass das mentale Objekt komplexer ist als das betrachtete Phänomen. In diesem Zusammenhang spricht H. Freudenthal auch von einem „magischen Kontext“ (Freudenthal 1982, 39), der von Lernenden in die Aufgabenbearbeitung hineingedacht werden kann, damit diese für sie bewältigbar werden – auch wenn dabei ein Realitätsbezug verloren geht (vgl. ebd. 38f.). Christoph Selter (1994)

spricht bei irrational anmutenden Vorgehensweisen und Lösungen von Lernenden, „vom rationalen Kern irrationalen Vorgehens“ (ebd., 20) und greift hierbei die Annahme der Erweiterung der Zahlidee oder mathematischen Idee durch nicht-mathematisches Wissen und Erfahrung von H. Freudenthal auf. Auch die Perspektiven H. Freudenthals (1984, 38f.) und C. Selters (1994, 20f.) sind anschlussfähig an das Z^4-Modell und M^4-Modell nach I. Schwank.

Eingebettet sind die Betrachtungen von verschiedenen Repräsentationsmodi nach J.S. Bruner in den weitgehenden Überlegungen, dass fundamentale Ideen eines Fachs oder einer wissenschaftlichen Disziplin leitend für die Auswahl der Inhalte eines Unterrichtsfachs sind. Er fordert einen spiralcurricularen Aufbau von Unterrichtslehrgängen entlang von fundamentalen Ideen, sodass sie wiederkehrend im Bildungsprozess zum Tragen kommen und im Laufe der Schulzeit vertieft und ausgebaut werden. (vgl. Schwill 2001, 11f.) Von Christoph Ratz (2009) wird angeführt, dass J.S. Bruner durch das sog. discovery learning den Grundstein für die Entwicklung des entdeckenden Lernens, bspw. durch H. Winter, gelegt hätte und dabei gleichzeitig auf eine Tradition innerhalb von Philosophie und Pädagogik zurückgreife (vgl. ebd., 29f.).

J.S. Bruner hat sich aus einer strukturalistischen Perspektive mit der Frage auseinandergesetzt, wie fundamentale Ideen zum Lernen beitragen können und wie diese fundamentalen Ideen eruiert werden können. Dabei geht sein Ansatz nicht fachspezifisch vor.

Andreas Schwill (2001) leitet in der Auseinandersetzung mit fundamentalen Ideen eines Fachgebiets her, dass sie „ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- und Erklärungsschema“ (ebd., 8 mit Referenz auf Bruner) sind in Bezug auf ein Horizontal-, Vertikal-, Zeit- und Sinnkriterium (vgl. ebd.). Hierbei sind das Sinn- und Zeitkriterium relevant dafür, dass ein Begriff überhaupt in Alltag und Geschichte ausgebildet wird. Wohingegen das Vertikal- und Horizontalkriterium grundlegend für fundamentale Ideen sind. Das Sinnkriterium hat „einen Bezug zu Sprache und [zum, P.S.] Denken des Alltags und der Lebenswelt“ (ebd.). Das Zeitkriterium ist in der historischen Entwicklung zu verorten und bezieht sich auf die Relevanz und Wahrnehmbarkeit eines Begriffs in der Geschichte. Das Vertikalkriterium ist dann erfüllt, wenn eine potenzielle fundamentale Idee „auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann“ (ebd.) und das Horizontalkriterium, wenn eine potenzielle fundamentale Idee „in verschiedenen Bereichen (der Wissenschaft) vielfältig anwendbar oder erkennbar ist“ (ebd.). Sind diese vier Kriterien erfüllt, so handelt es sich bei dem analysierten Objekt, um eine fundamentale Idee eines

Inhaltsgebiets. Folgt man A. Schwill (2001) in seinen Ausführungen, so ist die Suche und das Herleiten von fundamentalen Ideen eine komplexe Herausforderung. Innerhalb der Mathematik gibt es nicht einheitlich definierte fundamentale Ideen, da hierbei ein gewisser subjektiver Ermessensspielraum existiert. Als fundamentale Ideen der Arithmetik werden nach Christian E. Wittmann (zit. nach Meyer 2017) die Zahlreihe, das Rechnen, Rechengesetze und Rechenvorteile, das Zehnersystem, die Rechenverfahren sowie die Gesetzmäßigkeiten und Muster gesehen. Die Verfassenden würden die fundamentale Idee der Zahl hinzufügen.

Eine vorläufige Antwort für J.S. Bruner zum Umgang mit fundamentalen Ideen im Unterricht ist „[t]o learn structure, in short, is to learn how things are related." (Bruner 1977, 7) Durch das Kennenlernen und das Erlernen des Umgangs mit diesen zugrundeliegenden Strukturen sieht Bruner Lernende dazu befähigt die zugrundeliegende Strategie des Problemlösens auf ähnliche Fälle zu übertragen. Er führt exemplarisch zur Algebra aus:

> [A]lgebra is a way of arranging knowns and unknowns in equations so that the unknowns are made knowable. The three fundamentals involved in working with these equations are commutation, distribution, and association. Once a student grasps the ideas embodied by these three fundamentals, he is in a position to recognize wherein ‚new' equations to be solved are not new at all, but variants on a familiar theme. Whether the student knows the formal names of these operations is less important for transfer than whether he is able to use them. (ebd., 7f.)

Dies macht deutlich, dass die zugrundeliegenden und Anwendung findenden Strukturen verstanden und angewendet werden können, ohne dass dies explizit und somit völlig bewusst sind. Diese Annahme ist anschlussfähig an das entdeckende und begriffsentwickelnde Lernen, denn Reflexionsfähigkeit gilt jeweils als zentrales Ziel dieser Unterrichtsformen sowie der Ausbau des Wissens- und Erfahrungsschatzes durch verschiedene Handlungen neben den methodischen Kompetenzen. Des Weiteren greift an dieser Stelle das Spiralkriterium J.S. Bruners, das die Fortsetzbarkeit der fundamentalen Ideen in weiteren Unterrichtsgeschehen, auch über Schuljahre hinweg, hervorhebt. (vgl. Schwill 2001, 11)

3 Unterrichtsgestaltung (Rosemann)

Die bisher beschriebenen theoretischen Aspekte gilt es in diesem Kapitel konkreter auf den Unterricht zu beziehen. Allerdings ist der pädagogisch und didaktisch so bedeutsame Einbezug der Lernenden, ihrer Motive, Ziele und Sinnbildungen sowie ihrer individuellen Voraussetzungen und Entwicklungszonen nur im Falle einer konkreten Lerngruppe möglich. Deshalb müssen auch die nachstehenden Ausführungen trotz vieler Unterrichtsempfehlungen eher allgemeiner Natur bleiben.

Nach der Verbindung mathematikdidaktischer und kulturhistorischer Überlegungen, der Vorstellung der verschiedenen Abstraktionsstufen des Stellenwertsystems und entsprechender Zähl- und Rechenmittel kommt es zu einer Zusammenfassung bedeutsamer Kriterien für die Gestaltung eines inklusiven Stellenwert-Unterrichts auf Basis der dargestellten Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit. Abschließend wird anhand eines Beispiels – das angesichts einer fehlenden Lerngruppe nur begrenzt konkret gestaltet werden kann – gezeigt, wie mithilfe und unter Berücksichtigung der dargestellten Erkenntnisse Unterricht des Stellenwertsystems inklusiv realisiert werden könnte. Doch zunächst seien im folgenden Kapitel mathematikdidaktische und kulturhistorische Aspekte zur Synthese gebracht.

3.1 Synthese der didaktischen Überlegungen aus kulturhistorischer und mathematikdidaktischer Perspektive (Schwarzenberg)

In der Zusammenschau der kulturhistorisch sowie mathematikdidaktisch geprägten Überlegungen ergeben sich sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede hinsichtlich der Annahmen über Entwicklung, Lernen und Kompetenzerwerb. Aber dennoch oder vielleicht genau deshalb, können die Positionen begründet in Beziehung zueinander gedacht und somit gewinnbringend in die anstehende Unterrichtskonzeption gewinnbringend einbezogen werden.

In der Didaktik, die der kulturhistorischen Schule entspringt, wird Unterricht entlang invarianter Inhalte und Strukturen, der Lehr-/Lernstrategie des Aufsteigens des Abstrakten zum Konkreten oder von Keimzellen ausgehend reflektiert. Hierbei wird die Ontogenese maßgeblich durch die kulturellen und historischen Errungenschaften der Phylogenese bedingt gedacht.

Auf Seiten der Mathematikdidaktik hingegen hat sich ein konstruktivistisches und personenorientiertes Unterrichtsverständnis entlang fundamentaler Ideen zum Aufbau mathematischer Begriffe durchgesetzt. Es kommt zu einer Schülerzentrierung und zu der Forderung nach spiralcurricular aufgebauten Lerngängen, in denen fest das entdeckende und somit handlungsorientierte neben dem fachlichen Lernen verankert ist.

Dennoch konstatiert Christoph Ratz (2009) in Bezug auf die Sonderpädagogik allgemein eine als dialektisch zu bewertende Situation, da auf

> der einen Seite die Überwindung von Barrieren durch rezeptives Lernen und damit neue Möglichkeiten, Behinderung zu relativieren [vollzogen wird; P.S.], auf der anderen Seite gerade dadurch die Verweigerung, konstruktivistisches Lernpotenzial und tieferes Verständnis für Menschen mit Behinderung anzuerkennen (23),

zustande kommt. Dies sieht er exemplarisch auch im Fach Mathematik im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Er wertet die erneuerten Lehrpläne für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung sowie für die Grundschule in Bayern als Beleg für eine Neuorientierung an konstruktivistisch geprägten Auffassungen. (vgl. ebd., 17ff.) Besonderes Potenzial sieht er in den Möglichkeiten zum zieldifferenten Lernen in Verbindung mit dem aktiv-entdeckenden Lernen, das er als Weiterentwicklung des entdeckenden Lernens von H. Winter auffasst (vgl. ebd., 24). Demnach nimmt er an, dass auch innerhalb der Sonderpädagogik eine Umorientierung hinsichtlich konstruktiven mathematischen Lernen sich anbahnt – und er unterstützt dies. Dies erscheint jedoch den Verfassenden verkürzt, da zum einen Unterrichtsimpulse für maximal heterogene Lerngruppen geschaffen werden sollen und zum anderen phylogenetische Betrachtungen starken Einbezug erfahren sollen, neben der Ontogenese.

Im Folgenden sollen Gemeinsamkeiten und Unterschiede innerhalb der didaktischen Denkweisen herausgearbeitet werden, um diese – wie bereits angekündigt – für die weiterführende Entwicklung eines lern- und entwicklungsorientierten Unterrichts nutzbar zu machen, der im Einklang mit der makrostrukturellen Ebene sowie der Grundhaltung der Verfassenden dieser Arbeit steht.

3.1.1 Orientierung entlang der Lehr-/Lernstrategie [A →K], Invarianten und Keimzellen (Schwarzenberg)

Die drei vorgestellten kulturhistorischen didaktischen Überlegungen der Lehr-/Lernstrategie vom Abstrakten zum Konkreten, der Orientierung an Invarianten sowie das Arbeiten mit Keimzellmodellen sind miteinander kompatibel und können in einem Vorgehen vereint werden – sowie sich dies schon in der fachwissenschaftlichen Gegenstandsaufbereitung gezeigt hat. Nun gilt es, die ausgewählten mathematikdidaktischen Überlegen dazu in Beziehung zu setzen.

Die *Lehr-/Lernstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten* stellt, wie bereits deutlich herausgearbeitet, eine Abkehr vom eher alltäglichen und demnach empirischen Verständnis der Begriffe abstrakt und konkret dar. Hierbei bilden die Abstraktionen Hilfsmittel, also innere und äußere Werkzeuge, die zum Erschließen des Konkreten, der reichhaltigen Lebenswirklichkeit dienen. Dieses Erschließen vollzieht sich in einem spiralförmigen Prozess, indem Ausgangsabstraktionen durch neugebildete überformt werden können. Dies geschieht mit der Intention der fortschreitenden Wirklichkeitserschließung und Persönlichkeitsentwicklung.

Auch die Mathematik und ihre Didaktik zielen im Kontext von Allgemeinbildung darauf ab, einen Beitrag zur individuellen Bildung und demnach zu einer Verbindung zwischen Alltag und Mathematik zu leisten. Dabei werden fundamentale Ideen als leitend für den Unterricht erachtet, die im Laufe einer Schullaufbahn aktiv handelnd ausgebaut und vertieft werden sollen. Diese fundamentalen Ideen, anhand derer in einem spiralförmigen Prozess eine immer neue Stufe der Abstraktion erreicht werden soll, können in einem sehr allgemeinen Sinne als mathematische Invarianten, also als die Mathematik konstituierenden Elemente angesehen werden. Hierbei unterscheidet sich signifikant der Einbezug der kulturell-historisch bedingten Lebenswirklichkeit, die innerhalb der kulturhistorischen Perspektive dominant ist, von dem konstruktivistisch geprägten mathematischen Lernen, wobei der Schwerpunkt auf Handlungen und Aktivität der einzelnen Lernenden beim Problemlösen und ihrer Ontogenese steht.

Auch die kulturhistorische Schule betont die Handlungsorientierung und die Aktivität der Lernenden, allerdings werden diese Prinzipien in die Überlegungen einbezogen, *wie* Begriffe, Handlungen und Operationen durch Tätigkeit interiorisiert werden – diese Form der Überlegungen scheint in der Mathematikdidaktik nur durch die Annahme beantwortet zu werden, dass sich

das handelnde Individuum die Lebensumwelt selbst konstruiert. Demnach stellt die Betrachtung der Tätigkeit aus der kulturhistorischen Schule einen wesentlichen Modus für die Interpretation und Analyse der Konstruktion dar, was durch den Einbezug der führenden Tätigkeiten, der Orientierung an Zonen der Entwicklung und der etappenweisen Interiorisation und Herausbildung von Operationen und Begriffen ergänzt werden kann und von den Verfassenden als potenzielle Bereicherung für die Didaktik der Mathematik angenommen wird.

Die prozessbezogene Kompetenz des Problemlösens/Kreativseins ist in dem Lehrplan in der Grundschule in Nordrhein-Westfalen für den Mathematikunterricht sowie in den nationalen Bildungsstandards fest verankert und wird als Ausgangspunkt für das entdeckende Lernen in herausfordernden Lehr-/Lernsituationen genutzt. Gleichzeitig kann innerhalb der Phylogenese der Entwicklung der Zahldarstellungen und der Zahl ebenfalls ein fortwährender Problemlöseprozess gesehen werden. Da Tätigkeit motivgebunden ist und Handlungen zielorientiert sind, kann davon ausgegangen werden, dass eben jene durch die Auseinandersetzung mit einem problembehafteten Lerngegenstand am ehesten zum Tragen kommen.

Beschäftigt man sich nun mit der Herausbildung von Operationen und Begriffen im mathematikdidaktischen Sinne, so sind *empirisches Wissen und Denken* in ihrer Alltagsgebundenheit auf das Anschauliche und Ganzheitliche ausgerichtet, entlang dessen betrachtete Gegenstände nach Gemeinsamkeiten klassifiziert werden. Dies ist als eine Ähnlichkeit zum prädikativ-logischen Zurechtlegen und Denken nach I. Schwank anzunehmen, da auch hierbei Gemeinsamkeiten als Ordnungskriterien angenommen werden ohne die dahinterstehenden Prozesse miteinzubeziehen. Auch die Betrachtung der Ausgangspunkte des Begriffserwerbs, der phänomenologischen Begriffsbestimmung und der handelnden Auseinandersetzung mit Phänomenen bei der Begriffsentwicklung, schreibt dem empirischen Wissen und Denken einen Stellenwert beim Aufbau mathematischer Begriffe zu. Erst im Verlauf der weiteren Begriffsentwicklung wird durch die Rekonstruktion und die Systematisierung zunehmend aus dem Empirischen abstrahiert und die Gegenständen werden einer schematisierenden und mathematisierenden Entwicklung unterworfen, aus der letztlich die wissenschaftlich-mathematischen Begriffe resultieren, die gerade für Transfer- und Reflexionsleistungen ausschlaggebend sind. Hierbei kommt es zu einer Orientierung auf das theoretische Wissen und Denken. Da beim funktional-logischen Denken Kon-

struktionsprozesse im Vordergrund stehen, die zur Begründung und Voraussage von Veränderungsschritten genutzt werden, scheint hierbei eher auf theoretisches Wissen und Denken sowie auf invariante Strukturen fokussiert zu werden, was die Zusammengehörigkeit von Gegenständen oder spezifischen Repräsentanten auszeichnet. Dieser Betrachtungsmodus ist gerade bei der Lehr-/Lernstratege [A → K] hilfreich, um aufsteigende Abstraktionen sowie ihre Zusammenhänge und Veränderungen im Lernprozess wahrnehmen und verstehen zu können. Dies scheint dem Aufbau *theoretischen Wissens und Denkens* zuträglich zu sein, was innerhalb der konstruktivistischen Mathematikdidaktik der Begriffsentwicklung als Ziel angestrebt zu werden scheint. Denn bei der weiteren Erörterung der mathematischen Begriffsentwicklung wird zunehmend eine Abstraktion von dem Empirischen vollzogen hin zu rekonstruierenden, dabei aber abstrahierenden Bestimmungsformen. Hierbei gewinnen zunehmend die konstituierenden Elemente eines Begriffs an Bedeutung, worunter gerade theoretisches Wissen und Denken fallen.

Auch wenn also aus mathematikdidaktischer Perspektive der Aufbau theoretischen Wissens und Denkens zum Ziel erhoben wird, scheinen die Mittel zur Erreichung ihren Ausgangspunkt in eher empirischer Form zu haben, was aus kulturhistorischer Sicht als ineffizient anzunehmen ist, da die Orientierungsgrundlage gemäß des dritten oder vierten Typs nicht einbezogen wird.

Innerhalb der explizit-definitorischen sowie der implizit-axiomatischen Begriffsbildung tritt die Bedeutung der Sprache, vor allem der mathematischen Fachsprache, deutlich zutage. Dies kann als Verbindung zur Interiorisation aufgefasst werden, da von Handlungen über äußere Sprache innere Sprache und Denken entwickelt werden. Bei der definitorischen Begriffsbestimmung steht die Auseinandersetzung mit konstituierenden Merkmalen von Oberbegriffen im Vordergrund, die daraufhin analysierend auf Unterbegriffe übertragen werden sollen – hierbei scheint eine funktional-logische Perspektive hilfreich. Dies referiert wiederum auf den Erwerb eines Begriffsverständnisses, das neben der Integration in Begriffsnetze, auch den Inhalt und Umfang von Begriffen beinhaltet sowie Kompetenzen zum Transfer und zur Reflexion. Insgesamt scheint die Begriffsbildung im entdeckenden Lernen auf die Ausbildung theoretischen Wissens und Denkens zu zielen.

Diese Einschätzung kann gut durch die etappenweise Interiorisation von Begriffen nach P.J. Gal'perin (2004) ergänzt werden – wie bereits angeklungen. Bei diesen Interiorisationsprozes-

sen finden sich Ansatzpunkte für die Anschauung und das Denken entlang verschiedener Repräsentationsformen, die mathematikdidaktisch durch das EIS-Prinzip und die zuvor angedeuteten Weiterentwicklungsmöglichkeiten (weitere Anschauungsebene sowie Orientierung auf mentale Repräsentationsformen) skizziert werden können unter der Berücksichtigung des Z^4- und M^4- Modells, das auf den Übergang zwischen inter- und intraindividueller Ebene Bezug nimmt. Hierbei stellt die etappenweise Interiorisation jedoch einen genaueren Orientierungsrahmen zur Verfügung, wie sich der Übergang vom inter- zum intraindividuellen Begriff bzw. die interpersonelle Operation zur intrapersonellen entwickelt.

Invariante Strukturen als Grundlage für einen Stellenwertunterricht können durchaus als fundamentale Ideen gedacht werden, da sie vor allem das Zeit- und Sinnkriterium durch die phylogenetische Ausrichtung erfüllen sowie das Vertikal- und Horizontalkriterium hinsichtlich Reichhaltigkeit und Differenzierungsmöglichkeiten bedienen. Durch die Integration von Invarianten als Mittel und bei zunehmender Verinnerlichung als Analysewerkzeug in die Orientierungsgrundlagen des dritten oder vierten Typs leisten sie einen Beitrag zu der Erschließung des Konkreten durch das Abstrakte. Gleichzeitig stellen Invarianten in der Orientierungsgrundlage auch ein Kontrollwerkzeug für Durchführung und Reflexion des Vorgehens dar, was ein vertieftes Verständnis der Begriffe und verrichteten Handlungen und ihrer Operationen bedingen kann. Die enge Verzahnung von Orientierungsgrundlagen und Interiorisationsprozessen kann der Begriffsentwicklung zuträglich sein. Da beim entdeckenden mathematischen Lernen Probleme bewältigt werden, brauchen Lernende Mittel und Werkzeuge in Form von Invarianten, um Varianten zu erkunden und gleichzeitig das Invariante zu erschließen, zu verinnerlichen und zu psychischen Werkzeugen zu machen.

Der *entwickelnde Unterricht entlang von Keimzellen* scheint mit dem Unterricht entlang fundamentaler Ideen eines Fachs bzw. der Mathematik in Beziehung gedacht werden zu können, da die fundamentalen Ideen als invariante Strukturen des Unterrichtsgegenstandes aufgefasst werden, die spiralcurricular in der Schullaufbahn fortgesetzt und vertieft werden – dies ist bereits im Verlauf der Arbeit deutlich herausgearbeitet worden. Das Zusammenspiel verschiedener Invarianten, die modellhaft in Beziehung gedacht werden, kann dabei eine Keimzelle bilden, die innerhalb eines Lehrgangs oder über Schuljahre hinweg weiter ausdifferenziert werden kann und den Lernenden Orientierung sowie ein Analysewerkzeug liefert. Des Weiteren kann durch

fortschreitende Schematisierung und Mathematisierung ein vertieftes Verständnis für Begriffe und Handlungen erzeugt werden, was gerade durch die Arbeit mit Keimzellmodellen unterstützt wird und ist mit dem Erfordernis der Kooperation verwoben ist, die im kulturhistorischen Sinne unentbehrlich für das Lernen in der Zone der nächsten Entwicklung entlang führender Tätigkeiten ist. Dies ist bereits im fachwissenschaftlichen Teil deutlich herausgearbeitet und vorgeführt worden und wird im Folgenden bei der Unterrichtskonzeption erneut fruchtbar gemacht.

Durch das Lernen entlang von Keimzellen, die Invarianten beinhalten und einen Beitrag zur Erschließung des Konkreten durch Abstraktion leisten, kann über die Individualebene hinausgedacht werden, was eine ergiebige Ergänzung für die vorgestellten mathematikdidaktischen Ausführungen darstellt. Durch die kulturhistorische Sichtweise auf Lernen und den Lerngegenstand, kann die ontogenetische (Lern-)Entwicklung durch eine phylogenetische Perspektive angereichert werden.

3.1.2 Möglichkeiten der Differenzierung (Schwarzenberg)

Die zuvor skizzierten Überlegungen ermöglichen das Entwickeln von Überlegungen zu inneren Differenzierungsprozessen, die besondere Begabungen sowie Lernschwierigkeiten gleichzeitig berücksichtigen und reflektieren können. Die mathematischen Ausführungen zur Begriffsbildung, vor allem der Begriffsbestimmungsform sowie der Begriffsvorstellung können für diagnostische Prozesse zu mathematikdidaktischen Kompetenzen hilfreich sein und durch die Perspektive der Interiorisation angereichert werden. Hierbei können verschiedene Repräsentationsformen entlang des ‚erweiterten' EIS-Prinzips, der Art und Weise des funktionalen oder prädikativen Zurechtlegens in tätigkeitstheoretische Überlegungen zur Konzeption der Entwicklungszonen und führenden Tätigkeiten eingeordnet werden.

Gleichzeitig stellen Tätigkeit und Begriffsentwicklung Voraussetzungen für die Suche nach fundamentalen Ideen, Invarianten und Keimzellen dar und somit für das Lernen und die Entwicklung innerhalb der Zone der nächsten Entwicklung – dies kann vor allem für Reflexionsprozesse der Unterrichtsplanenden fruchtbar gemacht werden, um eigene Schwierigkeiten bewusst werden zu lassen sowie gleichzeitig Herausforderungen und Chancen für Lernende vorab antizipieren zu können.

Mathematischer Begriffserwerb im entdeckenden Unterricht und die Geschichte des Stellenwertsystems haben gemeinsam, dass Lern- und Entwicklungsprozesse als Lösungen von auftretenden Probleme verstanden werden können, die von Menschen in Kooperation über längere Zeiträume erarbeitet worden sind – was jeweils als Ausdruck von Kompetenz aufzufassen und anzuerkennen ist. Hierbei werden die Aktivität und das Handeln als essentiell für diese Entwicklungen gesehen – sowohl in der Phylogenese der Zahldarstellung und des Stellenwertsystems als auch in der Ontogenese innerhalb der Didaktik der Mathematik. Dies lässt die Analyse der Zone der aktuellen Entwicklung hinsichtlich der Orientierung auf die Zone der nächsten Entwicklung hin als bereichernde Perspektive im pädagogischen Geschehen erscheinen.

Die verschiedenen Repräsentationsformen nach J.S. Bruner sowie die Ergänzung um die mentalen Repräsentationsformen durch I. Schwank sowie um die affektiv-emotionale Ebene nach W. Lamers und N. Heinen stellen Möglichkeiten für die innere Differenzierung innerhalb eines konkreten Unterrichts dar. Jedoch sind sie auf die spezifische Situation beschränkt, während eine Differenzierung entlang der führenden Tätigkeiten der kulturhistorischen Schule sowohl die vorausgegangene, gegenwärtige und die zukünftige (Lern-)Entwicklung betrachtet und danach fragt, wie Lehr- und Lernprozesse zum Erreichen der Zone der nächsten Entwicklung zu gestalten sind. Hierbei kann eine Differenzierung entlang verschiedener Repräsentationsformen eine Möglichkeit der Umsetzung sein, aber sie wird immer in die führenden Tätigkeiten und die interindividuelle Kooperation eingebettet bleiben.

Auch die kulturhistorisch geprägten didaktischen Ansätze referieren auf den Erwerb von Sinn und Bedeutung im Individuum von Begriffen. Die kulturhistorische Schule hat sich grundsätzlich mit der Frage auseinandergesetzt, wie Lernen und Entwicklung verlaufen und wie Begriffe zuerst interindividuell und anschließend intraindividuell ausgebildet werden. Auch die Mathematikdidaktik setzt sich mit dem Verhältnis von innen, also den mentalen Repräsentationen und außen, den mathematische bzw. Zahlidee bezogenen Ereignissen auseinander. Dafür sind das Z^4-Modell und M^4- Modell I. Schwank aussagekräftige Beispiele, neben den Ausführungen zum entdeckenden Lernen und der Begriffsentwicklung in Anlehnung an H. Winter. Die Annahme, dass der mathematische Formalismus und die Fachsprache bzw. die Zahlzeichen und Zahlwörter eine Zwischenstellung zwischen interner und externer Ebene darstellen, können demnach Überlegungen initiieren, die darauf abzielen, die Vermittlung zwischen den Ebenen

zu betrachten. Diagnostische Beobachtungen können also bei der Analyse von Tätigkeit auch explizit den Umgang mit Fachsprache und Fachformalismus als Prozess der Begriffsentwicklung einbeziehen und reflektieren.

Bei allen diagnostischen Bestrebungen sind Grenzen hinsichtlich der Kompetenz der Lehrpersonen möglich sowie bei ihrer Bereitschaft zu kooperieren und ihrer Motivation inklusiven Unterricht zu gestalten. Verschärft werden kann die Problematik durch die Reproduktion des segregierenden und ausschließenden EBUs durch den Selektionszwang. Dennoch werden seitens der Verfassenden durch die Verzahnung der didaktischen Ideen aus kulturhistorischer sowie mathematikdidaktischer Perspektive Chancen für den inklusiven Unterricht gesehen, die auf lange Sicht und unter politischem Engagement auch zur Überwindung der Ausschlusstendenz des EBUs beitragen können.

Zusammenfassend kann resümiert werden, dass die mathematikdidaktischen Überlegungen konstruktivistisch und personenorientiert auf Lernen und Entwicklung ausgerichtet sind. Die kulturhistorische Schule hingegen fokussiert die interindividuelle Kooperation in einem geschichtlich und kulturell geprägten Verhältnis. Diese hat dann Einfluss auf die intraindividuelle Entwicklung. In ihrem Zusammenspiel wird eine Möglichkeit für die Unterrichtsgestaltung gesehen, die sich aber auch nach den makrostrukturellen Begebenheiten ausrichten muss.

3.2 Abstraktionsstufen und Vorstellung entsprechender Mittel (Rosemann)

Aus der Beschreibung der phylogenetischen Abstraktionen und deren ontogenetischen Voraussetzungen kann nun der Frage nachgegangen werden, durch welche konkreten Mittel, also analoge Zahlrepräsentationen, ein inklusiver Unterricht der Zahl und des Stellenwertsystems erfolgen kann. Auch Klaus Rödler (2006) geht bei der Beschreibung seines Konzepts des Mathematikunterrichts in der Primarstufe von historisch genutzten Zähl- und Rechenmitteln aus, weshalb nachfolgend einige der geschichtlich genutzten und von ihm dargestellten Mittel aufgegriffen werden.

Dabei ist zu bemerken, dass die mathematikdidaktischen Forderungen nach dem Lösen von Problemen in Passung zu der Phylogenese stehen, da auch hier stets Probleme gelöst wurden. Als inklusiv ist der Unterricht nach Ansicht der Verfassenden dann zu bezeichnen, wenn alle Lernenden den Gegenstand wahrnehmen, ihn manipulieren oder mit ihm hantieren, spielen, lernen und arbeiten können. In diesem Zusammenhang ist auf die basalsten Fähig- und Fertigkeiten, auf denen das Mathematiklernen aufbaut, einzugehen. Diese sind, wie gezeigt wurde, das Wahrnehmen des Raumes, des eigenen Körpers im Raum, das Hantieren mit Objekten und die Wahrnehmung von endlichen Mengen von Objekten. Gleichzeitig können alle Zusammenhänge des Anfangsunterrichts bis hin zum Stellenwertsystem und dem Rechnen mithilfe ebendiesem enaktiv mittels einer kardinalen Zahldarstellung dargestellt und auch – wenn auch mühsam und mit dem Erfordernis einer hohen Aufmerksamkeit – berechnet werden! Also können auch mathematische Operationen, wie etwa die formal-symbolisch beschriebene Rechnung 256 - 68, immer auch enaktiv mittels einer unstrukturierten Menge an gleichwertigen Einzelelemente vollzogen werden. Dies liegt darin begründet, dass diese unstrukturierten Mengen ebenso wie die Zahldarstellung im dezimalen Stellenwertsystem auf die gleichen natürlichen Zahlen und die entsprechenden Zahlvorstellungen referieren.

Zugleich sind unstrukturierte Mengen phylogenetisch der Ausgangspunkt aller Weiterentwicklungen des Zahlbegriffs gewesen (Kerben in Knochen ohne Bündelung, Einwerfen von je einer Tonkugel für je ein Herdentier in einen Krug). Deswegen sind diese unstrukturierten Mengen das Mittel, welches im Folgenden für die erste Abstraktionsstufe vorgestellt wird.

3.2.1 Abstraktionsstufe I: Kardinale Zahldarstellungen (Rosemann)

Die erste Abstraktionsstufe führt zu einer kardinalen Repräsentation der Zahl, also einer Darstellung, welche die konkrete Menge hinsichtlich ihrer Eigenschaft ‚1' abstrahiert – wenn etwa Kinder einer Klasse gezählt werden, so sind alle Kinder verschieden, es wird jedoch dahingehend abstrahiert, dass jedes Kind für nur ein Element steht.

Eine kardinale Zahldarstellung ist eine unstrukturierte Menge, da viele Einzelelemente angehäuft werden, ohne dass auch große Mengen umstrukturiert werden.

Gleichzeitig ist, um beim Beispiel der Kinder einer Klasse zu bleiben, die Anzahl der Kinder begrenzt – sonst könnte sie weder wahrgenommen noch gezählt werden. Das Erfassen der Kinder in einer kardinalen Zahldarstellung erfolgt mittels einer Eins-zu-Eins-Zuordnung und führt zu einer kardinal dargestellten Hilfsmenge. Diese Ausgangsabstraktion der Zahl kann ebenfalls mithilfe folgender Keimzelle visualisiert werden.

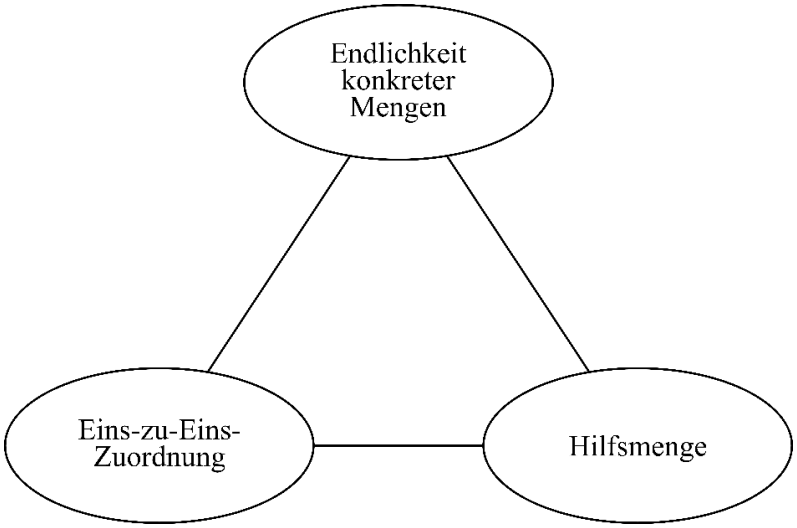

Abb. 14: Ausgangsabstraktion zur kardinalen Zahldarstellung

Nun ist die kardinale Zahldarstellung zum einen das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses, zum anderen jedoch ebenfalls ein Mittel, um sich die konkrete Wirklichkeit weiter anzueignen – schließlich können mithilfe einer kardinalen Zahldarstellung erneut Eins-zu-Eins-Zuordnungen vorgenommen werden, sie können als Hilfsmengen zur Ermittlung der Relationen <, =, > genutzt werden und sie können dadurch weitere Gewissheit darüber verschaffen, dass die wahrgenommenen und untersuchten Mengen tatsächlich endlich sind, da schließlich auch der Prozess der Eins-zu-Eins-Zuordnung ein Ende hat.

Im Sinne eines invarianten Unterrichts ist demnach das Mittel der kardinalen Zahldarstellung möglichst früh einzuführen. Als unstrukturierte Menge in enaktiver Form seien aus Gründen, die im folgenden Kapitel noch zu erläutern sind, kleine gleichgroße *Holzwürfel* gewählt. Diese sind selbst in großer Zahl für den Unterricht kostengünstig verfügbar, sie haben eine ökonomische geometrische Form, sind also stapelbar und regen zum strukturierten Aneinanderlegen und Spielen an. Solche unstrukturierten Mengen wären im Sinne Klaus Rödlers (2006) sog. *natürliche Rechenmittel,* da sie erstens den kindlichen Vorstellungen entsprechen – dies ist wohl anhand der weiten Verbreitung von Würfeln, Quadern und anderen geometrischen Körpern zum Spielen ersichtlich – und da sie zweitens kein „von der Schule geschaffenes Kunstprodukt" (54) sind, dass sie also nicht allein für didaktische Zwecke geschaffen wurden, sondern wahrhaft eine problemlösende Funktion in der menschlichen Phylogenese inne hatten (vgl. ebd.). Ebenfalls aus dem Grund der Natürlichkeit werden als ikonisches Mittel *Striche* als kardinale Zahldarstellung gewählt, da auch sie in der Phylogenese bedeutsam waren.

Doch zunächst sei auf enaktive unstrukturierte Mittel – hier Würfel – eingegangen, da diese den basalsten Zugang zur Zahl bieten. Denn an einer großen Menge Würfel können sowohl motorische und räumliche Erfahrungen gemacht werden als auch beliebige unnatürliche Vielzahlen erfasst werden. Gleichzeitig können mithilfe einer unstrukturierten Menge viele Erkenntnisse auf hohem Niveau gelingen: Die Menge kann überformt werden, die Würfel könnten zum Messen genutzt werden, es können selbst Zusammenhänge zwischen Flächeninhalt und Umfang und zwischen Kantenlängen von Quadern und ihren Volumina erforscht und erkannt werden. Ebenfalls können Würfel in verschiedenen Größen und Materialien angeboten werden, um Wahrnehmungs- und Handlungspräferenzen der Lernenden zu entsprechen. Gleichzeitig können Würfel für viele generische Beweise, dies sind Beweise grafischer Natur, genutzt werden. Diese Bandbreite an möglichen pränumerische und numerischen Erfahrungen zeichnet die durch Würfel dargestellte unstrukturierte Menge aus (vgl. ebd., 55ff.).

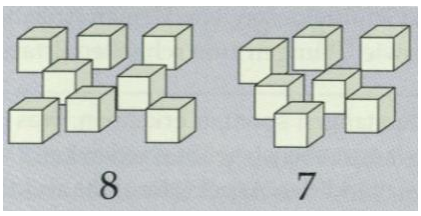

Abb. 15: Unstrukturierte Menge (Würfel) als Zähl- und Rechenmittel aus (Rödler 2006, 59)

Insbesondere führen die mathematischen Handlungen der Lernenden schnell auf Probleme, mit denen unstrukturierte Mengen behaftet sind: Sie sind unübersichtlich und helfen ebenfalls nicht, die Frage *wie viele* zu beantworten. Hier sind die Mittel des Zählens und des Bündelns daher einsichtige und folgerichtige Wege der Problemlösung.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass das Mittel des Zählens vielen Kindern in Teilen bereits zur Schuleingangsphase bekannt ist. Dieses sollten die Lernenden jederzeit verwenden können, es ist an dieser Stelle jedoch keine Voraussetzung. Zugleich bietet die natürliche Verwendung der Zahlwörter für die Lernenden, die bisher keine Zahlwörter nutzen, im Zuge des kooperativen Lernens die Möglichkeit, ihre Zahlwortkenntnisse zu erweitern.

3.2.2 Abstraktionsstufe II: Ordinalzahlaspekt und ordinale (ordinal-kardinale) Zahldarstellung (Rosemann)

Der Ordinalzahlaspekt kann durch eine Keimzelle mit folgenden Invarianten beschrieben werden:

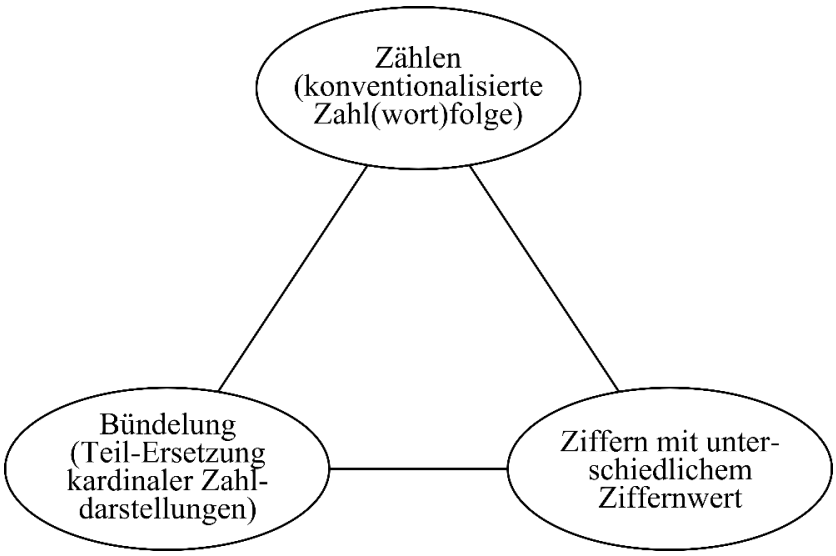

Abb. 16: Keimzelle zum Ordinalzahlaspekt und der ordinalen (ordinal-kardinalen) Zahldarstellung

Durch die Nutzung der Würfel als Repräsentanten einer unstrukturierten Menge mag sich bereits aus geometrischen Gründen die Idee bilden, diese der Übersichtlichkeit wegen zusammenzulegen, also zu bündeln:

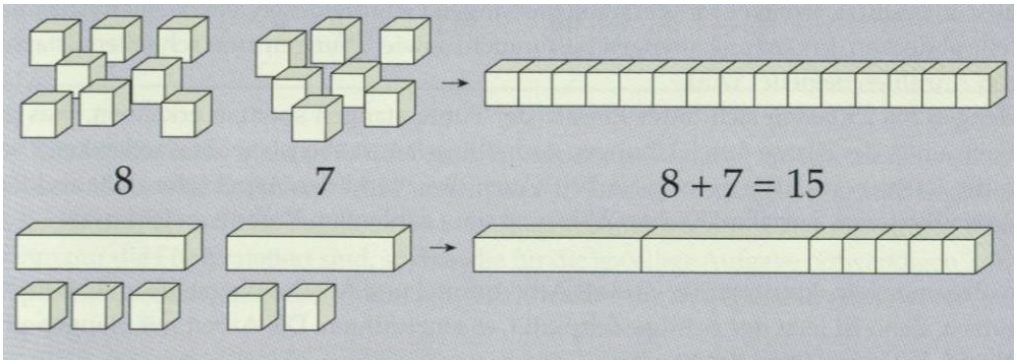

Abb. 17: Unstrukturierte und strukturierte Menge (Würfel) als Zähl- und Rechenmittel aus Rödler 2006, 59

Auch Maria Montessori (2000) nutzte Bündelungen, die aus unstrukturierten Mengen strukturierte Mengen erzeugen (vgl. 32ff.). Insbesondere die sog. Zehnersystemblöcke nutzen die bereits in der vorherigen Abstraktionsstufe verwendeten Würfel, weshalb diese bereits früh genutzt werden sollten. So ist das Mittel trotz einer neuen Abstraktionsstufe kein grundsätzlich anderes, ermöglicht aber gleichzeitig das Lösen von Übersichtsproblemen durch Bündelung.

Durch diese Bündelungen entstehen Stäbchen, Platten und Würfel, sodass die dezimalen Bündel der Zehner (Stangen), Hunderter (Platten) und Tausender (großer Würfel) jeweils durch verschiedene geometrische Körper repräsentiert werden:

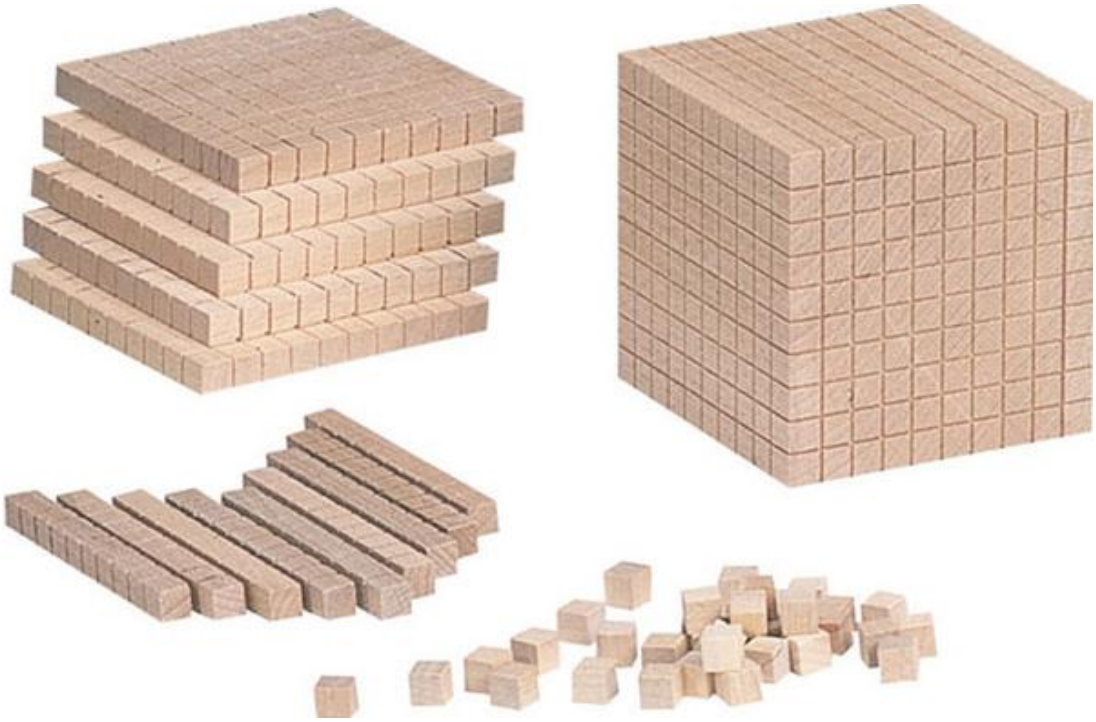

Abb. 18: Abbildung: Zehnersystemblöcke aus Betzold (o.J., o.S.).

Die Stärken dieses Materials sind nicht nur die offensichtliche Logik der Bündelung – viele Kinder würden wohl auf die Idee kommen, eine unstrukturierte Menge von 134 Würfeln in gewisser Art und Weise zu bündeln. Vielmehr ist hervorzuheben, dass diese enaktiven Bündel zwar durch die Bündelung eine neue Abstraktion darstellen, dass die gebündelten Mengen aber durch ihre allein kardinale Darstellung in ihrer Mächtigkeit unmittelbar erfahrbar sind (da sie ja aus Einer-Würfeln zusammengesetzt sind). Daher können sie als Bindeglied zwischen kardinaler und ordinaler (ordinal-kardinaler) Darstellung verwendet werden – ein Nachzählen der einzelnen Elemente ist im Zahlenraum bis 1000 stets möglich[20]. Auch das Entbündeln fällt leicht, da die einzelnen Würfel (Elemente), die in das Bündel eingegangen sind, sichtbar bleiben. Die Teil-Ganzes-Beziehung der Bündel, die schließlich den Ordinalzahlaspekt anbahnen soll, ist in einer gebündelten aber kardinal dargestellten Menge besonders offensichtlich und sollte ausgiebig genutzt werden.

Auf einer ikonischen Ebene kann durch die ebenfalls vorhergehend genutzten Striche eine kardinale Bündelung vollzogen werden, etwa durch das Schrägstellen jedes fünften Strichs – allerdings ist hier die dezimale Struktur nicht unmittelbar ersichtlich.

Zugleich können Ziffern mit ordinalen Werten durch weiteres Material angebahnt werden. So können etwa andere Körper für die Darstellung der Bündel genutzt werden. Die Wahl dar Repräsentanten ist dabei beliebig, es könnten etwa Kugeln, Pyramiden oder andere Objekte (wie Nüsse oder Muscheln) gewählt werden. Wesentlich ist zu diesem Zeitpunkt, dass die Werte der Bündel von der Anschauung gelöst werden und so abstrakte Konzepte repräsentieren – soll nun nachgezählt werden, müssen diese ordinalen (ordinal-kardinalen) Zahldarstellungen ‚rückübersetzt' werden.

Während die Kinder weiter ungeleitet zählend arbeiten können die Ziffern 1-9 angebahnt werden, indem die Nutzung der symbolischen Ebene ermöglicht wird. Allerdings können auch auf dieser Abstraktionsstufe alle Vorgänge mithilfe aller unteren Abstraktionen durchgeführt werden. So können die Kinder gemäß ihren Fähig- und Fertigkeiten strukturieren, Erfahrungen zum Raum, zur Mengeninvarianz und zur Teil-Ganzes-Beziehung machen.

[20] Auch größere zusammengesetzte Bündel sind kardinal möglich, allerdings haben diese zusammengesetzten Körper dann notwendigerweise wieder die gleiche geometrische Form. Exemplarisch wäre eine Zehnerbündelung entlang von Tausenderwürfeln möglich, um bspw. die 10.000 darzustellen.

Insbesondere können durch die dezimalen Bündelungen Anlässe zur Reflexion der Struktur der Zahlwörter geschaffen werden:

Warum steckt im Wort dreizehn das Wort für drei und für die Zehnerstange? Was kommt beim Wort (ein-)hundertdreizehn dazu und was hat das mit der Hunderterplatte zu tun?

Durch diese Erkenntnisse kann die Abstraktion des Bündels und der Zusammenhang von Bündelwerten und Zahlwörtern weiter gefestigt werden.

Zugleich sollten die Mittel des Zählens, des Bündelns und der Ziffer mit festem Wert (auf der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene also auch realisiert durch ordinale Bündel) genutzt werden, um sich die Varianz der konkreten Mengen und konkreten Operationen weiter anzueignen. Die Teil-Ganzes-Beziehung ist dabei auf allen Ebenen zu berücksichtigen, da sie für die kommenden Abstraktionsstufen von großer Bedeutung ist und dort weiter ausgebildet werden soll.

Die Einsicht in die Teil-Ganzes-Beziehung führt auf einsichtiges Rechnen insbesondere im Zahlenraum bis 10 und wird auch später als Basis verschiedener Grundvorstellungen der elementaren Operationen gebraucht. Diese Grundvorstellungen werden durch die Arbeit mit unstrukturierten und strukturierten Mengen weiter angereichert, da die (später allein geistigen) Handlungen des Addierens und Subtrahierens, aber auch der Multiplikation und Division als Verkürzung der beiden ersten Operationen, am Material durchgeführt und unmittelbar ersichtlich sind. Durch die Darstellungen ist eine Anschauung möglich, die dem prädikativen Denken entspricht, wohingegen durch die durchgeführten Handlungen am Material das funktionale Denken, das auf der Transformation von Zuständen beruht, genutzt und angebahnt wird.

Zugleich werden durch den Ordinalzahlaspekt und die ordinale (ordinal-kardinale) Zahldarstellung zwei wesentliche phylogenetische Probleme offensichtlich. Erstens ist das Erfassen sehr großer Mengen physisch umständlich, da die enaktiven Zahldarstellungen entweder immer größer (kardinale Zahlrepräsentation) oder immer unübersichtlicher werden (etwa durch die Tatsache, dass stets neue Bündelsymbole erinnert werden müssen). Zweitens – und dieser Aspekt ist wohl der auffälligere – wird das Rechnen mit größer werdenden Mengen immer umständlicher. Denn das Eins-zu-Eins-Zuordnen, Abzählen, Entbündeln oder erneutes Bündeln sind fehleranfällige und aufwändige Vorgänge.

An dieser Stelle sei erneut darauf hingewiesen, dass das Mittel des Zählens in Zahlwörtern auf allen Abstraktionsstufen genutzt werden darf und dass stetig Reflexionsanlässe über Zahlwörter (und demnach über die Bündelung und die dezimale Struktur des Stellenwertsystems) geschaffen werden sollten.

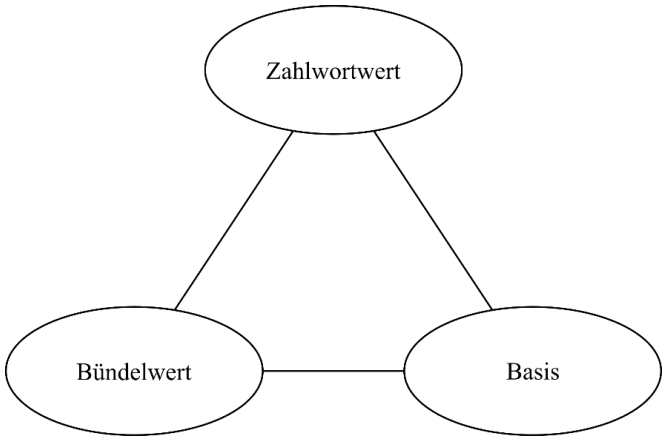

Abb. 19: Keimzelle der Zahlwörter

Die Keimzelle der Zahlwörter kann den Lehrkräften helfen, die Reflexionen mit den Schülerinnen und Schülern zu planen. Für die Hand der Lernenden ist sie angesichts der logischen Inkonsistenz des Aufbaus der Zahlwörter wenig hilfreich.

3.2.3 Abstraktionsstufe III: Konkretes Rechnen nach dem Prinzip des Stellenwerts (Rosemann)

Das Rechnen mit dem Prinzip des Stellenwerts konstituiert sich wie in Abb. 20 gezeigt.

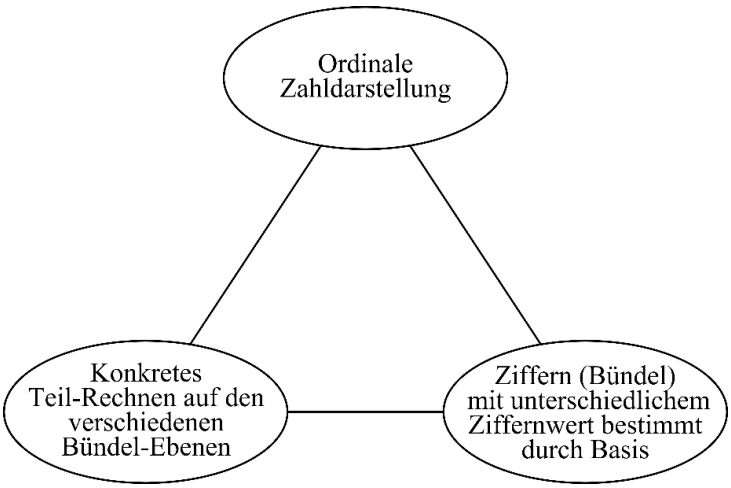

Abb. 20: Keimzelle des Rechnens mit dem Prinzip des Stellenwerts

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass natürlich bis zu dieser Abstraktionsstufe schon gerechnet wurde. Im Grunde sind alle bisher durchgeführten Handlungen Rechenhandlungen: So kann die Eins-zu-Eins-Zuordnung und das Zählen im Allgemeinen als eine Addition verstanden werden. Allerdings wurde bisher mithilfe der unstrukturierten Mengen und der strukturierten gebündelten Mengen gerechnet und gezählt, was erstens eine konkretere Vorstellung der dahinterliegenden Operationen erwachsen lassen sollte, was zweitens jedoch durch das konkrete Rechnen dazu führt, dass abstraktere Zusammenhänge weniger offensichtlich werden. Außerdem ist das Hantieren mit Material aufwändig; das Berechnen ist mühsam. Dieses wird durch das Prinzip des Stellenwerts und später durch die Nutzung von Symbolen (Ziffern) im Sinne der fortschreitenden Schematisierung vereinfacht. Trotzdem sind die Vorgänge im Grunde die gleichen, denn durch die Erfindung des dezimalen Stellenwertsystems ist das Rechnen „nichts anderes mehr als eine weitgehende Abkürzung des Zählvorgangs“ (Montessori 2000, 29).

Insbesondere sollten zu diesem Zeitpunkt die Grundvorstellungen der Addition und Subtraktion soweit angebahnt sein, dass weitere Abstraktionen mit dem Verfall der äußeren Anschauung durch eine innere Anschauung geleistet werden können.

Wiederum wird zur Verkürzung des Rechnens ein historisches natürliches Mittel gewählt. Dabei war das Prinzip des Nutzens der hybriden Zahldarstellung und somit das konkrete Teil-Rechnen auf den verschiedenen Bündel-Ebenen bei der Nutzung des historischen Kugelrahmens, des Abakus, des Rechentuchs oder des Rechenbretts identisch – ein Beispiel wurde bereits im Zuge der Beschreibung der Geschichte der Zahlentwicklung angeführt. Aus Gründen, die nachstehend darzulegen sind, fiel die Wahl auf die Verwendung des Rechenbretts (vgl. auch Rödler 2006, 95ff.).

Denn das Rechnen mit dem Rechenbrett hat den Vorteil, dass auf der tabellarischen Struktur verschiedene Repräsentanten für die Anzahl der Bündel angewandt werden können:

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer

Abb. 21: Schematische Darstellung des Rechenbretts mit Bündelwertzahlen

Die jeweiligen Bündel können (I.) durch eine allein kardinale enaktive Bündelung dargestellt werden (Zehnersystemblöcke, diese können wiederum leicht in die basalste Form der kardinalen Zahldarstellung, also in eine unstrukturierte Menge, überführt werden), sie können (II.) durch

eine ordinal-kardinale enaktive Bündelung, (III.) durch eine ikonische Bündelung (etwa durch die bisher verwandte Bündel in ikonischer Darstellung oder durch die Verwendung von Strichen) in der ersten Zeile und ebenfalls (IV.) durch die symbolischen Ziffern in Logik des Stellenwertsystems dargestellt werden. Die Darstellungen III und IV können auch auf einzelne Steine geschrieben werden, sodass auch in der zweiten Zeile mit diesen Darstellungen gerechnet werden kann.

Die grundlegende Idee dieser Rechenweise ist, dass ebenfalls auf Ebene der einzelnen Bündel gerechnet werden kann, wobei die Darstellung der Bündel auf die oben beschriebene Weise variiert werden kann:

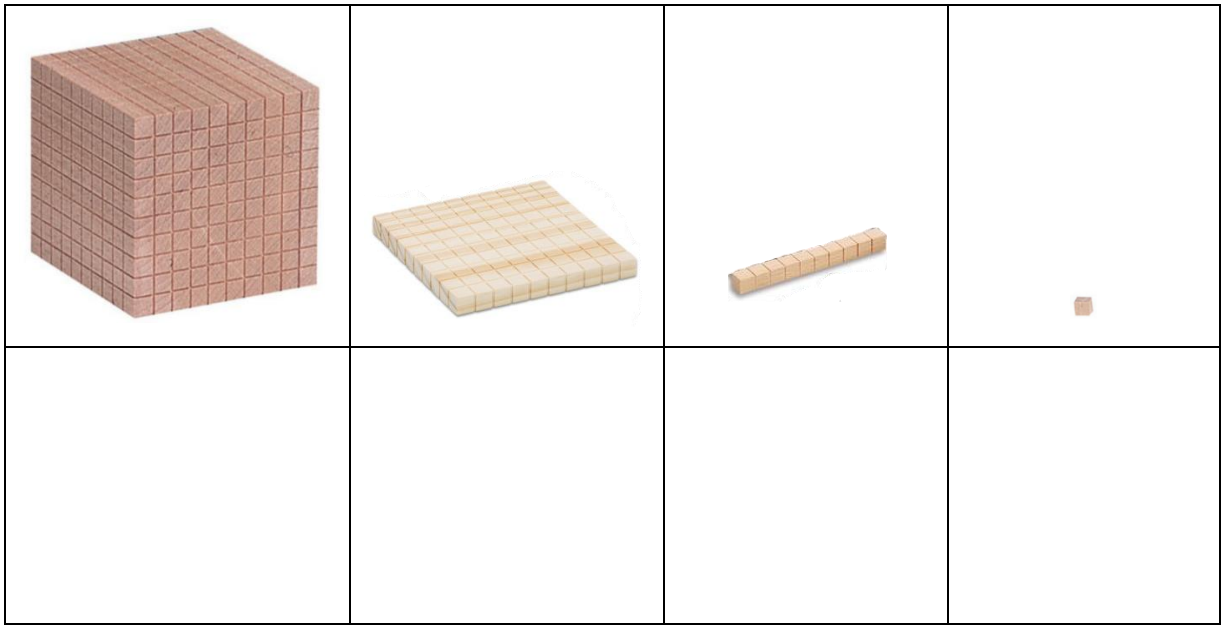

Abb. 22: Darstellung des Rechenbretts mithilfe von Systemblöcken. Fotos aus: Betzold (o.J., o.S.).

Dabei können nun im Sinne des multiplikativen Prinzips einzelne Stellvertreter, etwa Plättchen, oder auf einem basaleren Niveau schlicht die Anzahl der oben dargestellten Bündel genutzt werden, wobei dieses Vorgehen ebenso aufwändig wie das Vorgehen ohne Rechenbrett wäre. Allerdings ist dieses Vorgehen bereits strukturierter, da der Fokus auf die einzelnen Bündel gerichtet wird.

In ähnlicher Weise können nun die anderen beschriebenen Darstellungsweisen genutzt werden. Bedeutsam ist in diesem Zusammenhang, dass die einzelnen Darstellungen leicht ineinander übersetzbar sind, sodass hier die verschiedenen Abstraktionsstufen in einer Rechenmethode vereint sind. Auf symbolischer Ebene kann dann mit dem gleichen Prinzip unter Verwendung der

ordinalen Zifferndarstellung gerechnet werden, wie dies mit allein kardinalen Darstellungen vollzogen werden kann. Dies zeigt das inklusive Potential dieser Rechenmethode.

Zur weiteren Erläuterung sei noch die symbolische Rechenweise – die im Übrigen auch historisch in den europäischen Rechenpfennigen Verwendung fand – dargestellt. Die Kinder müssen sich dabei die Bedeutung der Ziffern 1-9 angeeignet haben und verfügen über zahlreiche Rechenpfennige mit den Ziffern 1-9: ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer

Abb. 23: Schematische Darstellung des Rechenbretts mit Bündelwertzahlen

Mit diesem System verlaufen Rechnungen schon nach dem Stellenwertprinzip unter dem starken Einfluss der Basis, da hier keine Ziffern > 9 vorhanden sind. Allerdings muss dafür das Rechnen der Kinder durch die Grundvorstellungen geprägt sein, da hier in einem kleinen Zahlraum im Kopf gerechnet werden muss. Allerdings kann zur Hilfe und Anreicherung der inneren Vorstellung stets die symbolische in eine enaktive Darstellung übersetzt werden.

Differenziert werden kann hier für rechenstarke Lerner ebenfalls, indem bereits Rechenpfennige mit der Null zu Verfügung gestellt werden und das Rechenbrett wie folgt beschriftet ist:

1000	100	10	1

Abb. 24: Schematische Darstellung des Rechenbretts mit Zehnerpotenzen

Durch die Verwendung der Null – diese wurde zu diesem Zeitpunkt noch nicht eingeführt – sie könnte vielen Lernenden aber bereits bekannt sein – folgt diese Darstellung der Logik des dezimalen Stellenwertsystems vollkommen. Dieses Differenzierungsangebot hat nicht allein den Zweck der Kindgemäßheit, die vorgreifende Verwendung der Mittel bietet für andere Lernende die Chance des Kontakts mit schematisierteren Mitteln, wie es das Konzept der fortschreitenden Schematisierung impliziert.

Weiterhin können ungewöhnlich starke Lernende auch weitere Basen, also weitere Bündelungen verwenden und so zu einem sehr frühen Zeitpunkt verschiedenen Stellenwertsysteme erkunden.

An dieser Stelle sei auf eine weitere Stärke des beschriebenen Vorgehens verwiesen. Angesichts der Neurodiversitätsdebatte wurde, wie vorhergehend schon beschrieben, auf Unterschiede in der Wahrnehmung unnatürlicher und natürlicher Vielzahlen eingegangen. Das gesamte bisherige Vorgehen ist hinsichtlich dieser Heterogenität variabel: Für Lernende, deren natürliche Vielzahl < 4 ist, kann eine Zweier- oder Dreierbündelung genutzt werden. So wird auch ihre Wahrnehmung entlastet. Ebenfalls können Lernende, deren natürliche Vielzahl > 4 ist, auch mit größeren Basen (Bündelungseinheiten) rechnen – etwa mittels des Hexadezimalsystems (Basis 16), des Vigesimalsystems (Basis 20) oder gar des Sexagesimalsystems (Basis 60) der Babylonier.

Allerdings zeigt sich bei allen beschriebenen Rechenweisen des Rechenbretts ein letztes Problem, welches zur Verwendung des dezimalen Stellenwertsystems führt: Noch immer ist das Rechnen umständlich, da zahlreiche Tausch-, Bündelungs-, und Entbündelungshandlungen notwendig sind. Zudem wird stetig Material gebraucht, was nicht nur unpraktisch, sondern auch ein äußeres Mittel ist: Ist das Rechenbrett nicht verfügbar, fällt das Kopfrechnen selbst im Falle vergleichsweise kleiner Additionsaufgaben (17 + 15 = 32) schwer.

Außerdem ist das Rechnen fehleranfällig, da der Prozess des Rechnens nicht nachvollziehbar ist – er wird nicht verschriftlicht. Werden Fehler beim Eins-zu-Eins-Zuordnen, Zählen oder Bündeln gemacht, können diese nicht rückverfolgt werden.

3.2.4 Abstraktionsstufe IV: Stellenwertsystem (Rosemann)

Die beschriebenen Probleme werden erst durch die Verwendung schriftlicher Rechnenverfahren und somit durch die Verwendung des Stellenwertsystems möglich. Die Notwendigkeit der Null dürfte dabei den Kindern unmittelbar einleuchten, da zu diesem Zeitpunkt leere Stellen durch das Fehlen eines Elements dargestellt wurden. Da dies nun im Zuge einer schriftlichen Darstellung nicht mehr möglich ist, übernimmt die Null zu diesem Zeitpunkt schlicht die Aufgabe einer leeren Tabellenzelle.

Die Invarianten dieser Abstraktionsstufe sind in Abb. 25 dargestellt.

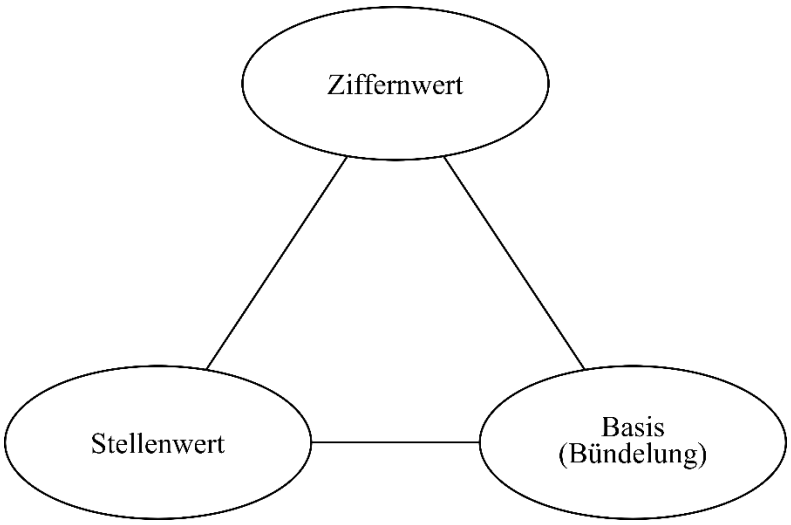

Abb. 25: Keimzelle des Stellenwertsystems

In diesem Kontext sei noch einmal auf das inklusive Element dieses Vorgehens eingegangen. Tatsächlich sind außer der Verwendung einer Null keine neuen Invarianten vorhanden. Das Stellenwertsystem in formal-symbolischer Darstellung ist hier – genau wie dies in der Geschichte der Zahldarstellungen der Fall war – schlicht eine logische Konsequenz der Verwendung bisheriger Werkzeuge der Problembewältigung und Aneignung. Und der Weg der Abstraktionen (visualisiert in der Grafik zur Phylogenese der Zahl und den erfahrungs- und personenbezogenen Kompetenzen) kann top-down oder bottom-up nachvollzogen werden. Dabei ist hervorzuheben, dass zu diesem Zeitpunkt alle Kinder, die die formal-symbolische Darstellung schon nutzen können, Rechnungen auf allen darunterliegenden Abstraktionsebenen durchführen können. Die Zone der nächsten Entwicklung ist daher auch für alle anderen Kinder nicht weit – da kompetentere andere Kinder die Schwierigkeiten der Abstraktionsstufen anderer Kinder nachvollziehen können. So können sie in Kooperation auf verschiedenen Niveaus tätig sein (vgl. auch fortschreitende Schematisierung). Zugleich ist das basalste Zahlerfassungs- und -berechnungsniveau Ausgangspunkt des Unterrichts für alle gewesen, sodass im Sinne einer sozialen Behinderungsgenese niemandem das Aufsteigen auf den Abstraktionsniveaus verwehrt wurde. Vielmehr steigen die Chancen der Bildung von Zonen der nächsten Entwicklung, da die Kinder in Kooperation arbeiten.

Somit sind als Materialien nur zwei wesentliche Mittel zu nennen: Mehrsystemblöcke (und deren Einzelwürfel als unstrukturierte Menge) und das Rechenbrett (mit verschiedenen Beschriftung und Zahlrepräsentationen).

3.3 Impulse für die Gestaltung inklusiven Stellenwertunterrichts (Rosemann)

Aus allen bislang beschrieben Grundlagen bezüglich der Inklusion und Behinderungsgenese, der Pädagogik, Didaktik und bezüglich der Grundlagen des Fachs und der Fachdidaktik erwachsen komplexe Anforderungen an den inklusiven Unterricht. Diese seien nachstehend zusammengestellt.

So ist im Kontext der sozialen Behinderungsgenese festzuhalten, dass jeder Unterricht kompromisslos voraussetzungsfrei sein sollte, dass er vom basalsten Niveau ausgehend geplant werden muss, um keine Schülerin und keinen Schüler auszuschließen. Daraus folgt die Notwendigkeit einer stetigen *Analyse und Reflexion der Inklusionschancen und der Exklusionsrisiken*. Weiterhin ist aus diesem Grund unbedingt am *Gemeinsamen Gegenstand* Georg Feusers festzuhalten, da durch diesen der Bildungsanspruch aller gesichert werden kann – in ihm ist das Demokratische realisiert, da niemandem der Zugang zu allen Facetten und Niveaus eines Gegenstands verwehrt werden kann.

Das dargestellte und angenommene Entwicklungsverständnis der kulturhistorischen Schule führt dazu, dass Unterricht in der *Zone der nächsten Entwicklung* stattfinden sollte (und wohl auch erst dann wahrhaft Unterricht ist), was die Notwendigkeit *kooperativen Lernens* deutlich macht. Nur in Kooperation kann die Zone der nächsten Entwicklung realisiert werden. Um Tätigkeit in der Zone der nächsten Entwicklung sicher zu stellen, muss zudem die Möglichkeit einer *pädagogischen Diagnostik* im Prozess gegeben sein, die jegliche Kompetenz (an-)erkennt.

Gleichzeitig ist sicher zu stellen, dass Lerngegenstand und Lernende, dass Elementares und Fundamentales, dass die ideelle und die rudimentäre Form, dass *Bedeutung und Sinn* stets in Passung zueinander gebracht werden. Dies schließt nach Auffassung der Verfassenden eine *Problemorientierung* ein. Diese Probleme müssen dabei beides sein: Fachlich (aktuell oder in der Vergangenheit) tatsächlich existierende Probleme, deren Lösung strukturelle Einsichten benötigt und bedingt und zweitens persönliche sinnstiftende und tatsächlich erkannte Probleme der Lernenden. Es sind also Probleme zu beschreiben, in denen sich Sinn und Bedeutung vereinen.

Dabei ist entsprechend der kulturhistorischen Theorie in aufsteigenden Abstraktionen zu lehren und lernen: An wenigen Varianten ist schnellstmöglich eine (Ausgangs-)Abstraktion zu erar-

beiten, die als Orientierungsgrundlage dritten Typs für die Erarbeitung weiterer konkreter Varianten genutzt wird. Ist eine Abstraktionsstufe nicht mehr ausreichend, ist möglichst schnell eine weitere Abstraktionsstufe zu erarbeiten. Diese *Invarianten (Begriffe)*, die in *Keimzellen* dargestellt werden, dienen als Werkzeuge (Mittel) im kulturhistorischen Sinne der Erarbeitung weiterer konkreter Varianten. So ist in Orientierung an den *Etappen der Interiorisation* nach der beschriebenen Motivation der Tätigkeit und Herstellung einer Orientierungsgrundlage das materielle Handeln, die Transformation dessen in äußere Sprache, die Verkürzung der äußeren Sprache und die Überführung dieser in eine innere Sprache ein begriffliches (invariantes) Denken anzubahnen. Dabei werden jedoch die in den Invarianten repräsentierten und durch sie konstituierten Begriffe stets zu Beginn als Mittel genutzt, wobei sie entsprechend der aufsteigenden Abstraktionen im Interiorisationsprozess nicht schon zu Beginn den vollständigen wissenschaftlichen Begriff bilden. Vielmehr bietet sich der Vergleich mit einem Kaufhauses mit vielen Etagen an: Auf der ersten Etage erhalten die Lernenden eine Karte (Mittel mit abstrakten Invarianten), mithilfe derer sie das Stockwerk erkunden (konkrete Varianten) – ist dies vollzogen, vollzieht auch der Unterricht einen Sprung und die Lernenden erhalten die Karte der nächsten Etage (aufsteigende Abstraktion, in der die vorher genutzten Invarianten eingehen).

Zugleich ist während der Auseinandersetzung auf die Realisierung von *Differenzierungsmöglichkeiten* zu achten, da gerade dies das inklusive Moment der Arbeit am Gemeinsamen Gegenstand konstituiert: Der Widerspruch von Individualität und Gemeinschaft muss stetig beachtet werden. Eine nicht-ausschließende Differenzierungsdimension ist die Beachtung aller *führenden Tätigkeiten* (perzeptiv, manipulierend, gegenständlich, Spiel, Lernen, Arbeit), sodass stets auf allen Tätigkeitsniveaus Zonen der nächsten Entwicklung realisiert werden können. Diese Differenzierungen müssen auch im verwendeten *Material* materialisiert werden. Zudem ist insbesondere im Kontext des Stellenwertsystems und der Zahl die *Neurodiversität* der Lernenden zu beachten – insbesondere die Tatsache, dass die natürlich erfassbare Vielzahl nicht für alle Menschen die gleiche Mächtigkeit hat.

Die mathematikdidaktischen Prinzipien des *entdeckenden* (also selbsttätig Strukturen entdeckenden) *Lernens* und der *fortschreitenden Schematisierung* sind unbedingt zu berücksichtigen, da sie zum einen eine Synthese von Sinn und Bedeutung ermöglichen und zum anderen in ihren Grundzügen zutiefst dem Fach entsprechen – Mathematik ist die Wissenschaft des Entdeckens

und Nutzens von Mustern und Strukturen zur Problemlösung und zum Selbstzweck der deduktiven Erkenntnis. Zugleich kann der Prozess der Phylogenese des Fachs als ein Prozess der fortschreitenden Schematisierung gefasst werden.

Zuletzt muss Unterricht anschlussfähig an die makrostrukturellen Aspekte sein – ein *Lehrplanbezug* anhand der prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Primarstufenlehrplans Mathematik Nordrhein-Westfalens ist unerlässlich.

Zusammengefasst sind also in der nachstehenden Darstellung eines möglichen Unterrichts folgende Aspekte zu beachten:

- Analyse und Reflexion der Inklusionschancen und der Exklusionsrisiken und deren Praktiken
- Gemeinsamer Gegenstand
- Zone der nächsten Entwicklung (Kooperatives Lernen)
- Pädagogische Diagnostik
- Sinn und Bedeutung
- Problemorientierung
- Invarianten (Begriffe) in Keimzellen
- Etappen der Interiorisation
- Differenzierung anhand der führenden Tätigkeiten
- Differenzierung am Material
- Differenzierung hinsichtlich der Neurodiversität
- Entdeckendes Lernen
- Fortschreitende Schematisierung und Mathematisierung
- Lehrplanbezug (inhalts- & prozessbezogene Kompetenzen)

3.4 Unterrichtsbeispiel (Rosemann)

Obschon die Beschreibung eines Unterrichts, in dem alle Schülerinnen und Schüler den gleichen Abstraktionsebenen folgen, zunächst aufgrund der inneren Logik der aufsteigenden Abstraktionen sinnvoll erscheinen mag, wäre ein solcher Unterricht wohl nicht auf das Lernen in der Zone der nächsten Entwicklung in heterogenen Lerngruppen ausgerichtet. Vielmehr muss davon ausgegangen werden, dass beispielsweise die führende Tätigkeit einiger Schülerinnen und Schüler die perzeptive Tätigkeit ist, während andere bereits auf einem hohen Niveau lernend tätig sind. Zugleich haben die Lernenden unterschiedlichste Erfahrungen mit mathematischen Mitteln: Während die einen noch darauf angewiesen sind, ihr Körperschema weiter zu entwickeln, können die anderen bereits bis 1000 zählen oder unter Umständen schon schriftlich unter Anwendung des Stellenwertsystems rechnen. Wie kann dieser Heterogenität also im Mathematikunterricht nicht nur begegnet werden? Oder mehr noch: Wie kann diese Vielfalt konstruktiv für die Weiterentwicklung *aller* nutzbar gemacht werden?

Bevor Ansätze zur Beantwortung dieser Frage anhand eines Beispiels dargestellt werden, sei eine heterogene jahrgangsgemischte Grundschulklasse angenommen, die sich durch eine große Bandbreite an Fähig- und Fertigkeiten der Lernenden auszeichnet. In der Klasse wird seit längerem kooperativ gelernt und auch mit dem Lernen am Gemeinsamen Gegenstand auf verschiedenen Niveaus ist die Klasse vertraut. Weiterhin sei davon ausgegangen, dass die vorhergehend dargestellten Materialien (Zähl- & Rechenmittel) alle bereits eingeführt wurden – jedoch nur so weit, wie es der Abstraktionsstufe und somit der ehemaligen Zone der nächsten Entwicklung entsprach. Es sind also nicht alle Mittel allen Lernenden bekannt. Allerdings – und dies muss in diesem Kontext angemerkt werden – wurde niemandem der Aufstieg in den Abstraktionen verwehrt. Vielmehr wurde allen Schülerinnen und Schülern innerhalb dieses Prozesses angeboten, auf ihrem nächsthöheren Niveau zu arbeiten. Anzumerken ist hier, dass die Realisierung dieser Angebote notwendigerweise der Einschätzung der Lehrkräfte unterliegt, womit hier ein großes Inklusions- aber auch ein großes Exklusionspotential besteht. In diesem Kontext ist auf den diagnostischen Teil dieser Arbeit zu verweisen.

Die verwendeten Zähl- und Rechenmittel sind entsprechend der vorherigen Darstellung:

- Würfel oder Strichlisten (als unstrukturierte Menge und kardinale Zahldarstellung)
- Zahlwörter

- Systemblöcke oder gebündelte Strichlisten (als strukturierte Menge und kardinale Zahldarstellung)
- Geometrische, nicht zusammengesetzte Körper (als strukturierte Menge und ordinal-kardinale Zahldarstellung), etwa Stangen (Zehner), Platten (Hunderter) und große Würfel (Tausender) ohne ersichtliche Unterteilung in Einzel-Würfel
- Das Rechenbrett (mit Systemblock-Darstellung, mit Bündelwertzahlen-Darstellung oder mit Zifferndarstellung), sowohl mit Würfeln als Rechensteine (kardinal) als auch mit Rechenpfennigen und Zifferndarstellung (ordinal)
- Die schriftliche formal-symbolische Stellenwertschreibweise

Diese dargestellten Mittel sind auch hinsichtlich der Erkenntnisse der Neurodiversitätsforschung zu variieren: Dem hier bedeutsamen Aspekt der unterschiedlich großen natürlichen Vielzahlen kann auf den Ebenen begegnet werden, auf denen diese Wahrnehmungsdisposition wirksam wird – nämlich im Fall der Bündelung. So können sowohl enaktive Bündelungsgrößen verkleinert oder vergrößert werden. Dies würde zu kleineren oder größeren Würfelstangen, Platten und Würfeln, zu kleineren oder größeren Strich-Bündeln sowie zu kleineren oder größeren Basen der Stellenwertsysteme führen. Zugleich bieten diese verschiedenen Bündelungsgrößen Anlass zur Reflexion der mathematischen Funktion dieser Bündel und Basen.

Jedem Kind soll im Zuge des Unterrichts der Gemeinsame Gegenstand mithilfe der ihr oder ihm adäquaten Mittel in Kooperation, also in der Zone der nächsten Entwicklung, erfahrbar gemacht werden. Zur weiteren Erläuterung muss nachstehend ein Gemeinsamer Gegenstand definiert werden.

Dieser kann entsprechend der Phylogenese als der Umgang mit sowie die Erfassung und Verarbeitung von unnatürlichen Vielzahlen gefasst werden, wobei – auch dies wurde gezeigt – die niedrigeren Abstraktionen in die aufsteigenden Abstraktionen mit eingehen. So aufgefasst ist das Stellenwertsystem das Ergebnis des Prozesses des Umgangs (der Erfassung und Verarbeitung) mit unnatürlichen Vielzahlen. Der Gemeinsame Gegenstand ist also die aufsteigend schematischer und formaler werdende Auseinandersetzung mit diesen unnatürlichen Vielzahlen, wobei alle Lernenden auf einer der vorhergehend dargestellten Stufen der Zahlabstraktion verortet werden können.

Dabei wurde auf die (Zukunfts-)Bedeutung der Zahl, der Zahldarstellung und der Zahlberechnung – auch, wenn dies wohl niemand hinterfragen würde – bereits mit Bezug auf Klafki eingegangen. Doch wie kann die zentrale Frage nach der Verbindung von Bedeutung und persönlichem Sinn beantwortet werden? Wie kann diese Bedeutung mit Sinn gefüllt werden?

Dazu kann folgende Problemsituation herbeigeführt werden, die wohl für die meisten Schülerinnen und Schüler persönlich sinnvoll ist. Zugleich birgt sie das Potential, auf allen Abstraktionsstufen mathematische Probleme zu schaffen. Die Verwendung der Zähl- und Rechenmittel führt zudem bis zur Verwendung des Stellenwertsystems zur Wahrnehmung weiterer Probleme, die mit den phylogenetischen Problemen dieser Mittel übereinstimmen – hier entsteht ab einem bestimmten Punkt der Auseinandersetzung mit einem problembehafteten Mittel der Wunsch, diese Nachteile zu beseitigen. Diese Situation kann wie folgt im Sinne eines Projekts hergestellt werden.

Einige Zeit nach Beginn eines neuen Schuljahres stellt die Lehrkraft ein geplantes Projekt vor. Am 11.November (Martinstag) soll die Klasse jedem Kind der Schule eine ‚Überraschungstüte' überreichen. Allerdings soll der gesamte Inhalt von den Schülerinnen und Schüler selbst in der Natur gesammelt werden. Für das hier dargestellte Beispiel können etwa folgende fünf Elemente für die Tüten gesammelt werden: Walnüsse, Esskastanien, Äpfel, Bucheckern und Haselnüsse. Diese können alle im Oktober (je nach Sorte und Umgebungsbedingungen auch schon im September) gesammelt werden. Zugleich sind diese (Nuss-)Früchte (nachstehend: Früchte) längere Zeit zu lagern.

Dieses Projekt kann zum einen verschiedene Fachbereiche abdecken. Exemplarisch zu nennen sind:

- Sachunterricht (Lebensräume, Reife, Sorte, Standorte ermitteln, Karten lesen, …)
- Sport und Bewegung (Sammeln)
- Kunst (Gestaltung einer Geschenkverpackung)
- Religion (Sankt Martin)
- Deutsch (Beschriften einer Karte, Erfahrungsberichte, …)

Zum anderen zeichnet sich dieses Projekt durch mathematische Anforderungen ganz unterschiedlicher Niveaus aus: Nachdem die großen unnatürlichen Vielzahlen gesammelt wurden,

müssen sie erfasst und klassifiziert werden (‚alle Äpfel auf einen Haufen'). Dies kann wie das Sammeln auch in Kleingruppen geschehen. Danach ist die Frage ‚wie viele' in jeder Kleingruppe für jede Klasse von Früchten zu beantworten. Gleichzeitig sind die einzelnen in den Gruppen ermittelten Mengen zusammenzuführen (Addition). Außerdem muss die Anzahl der Schülerinnen und Schüler ermittelt werden, auf die die gesammelten Früchte verteilt werden sollen. Die verschiedenen Klassen von Früchten müssen dann gleichmäßig auf die jeweiligen Schülerinnen und Schüler aufgeteilt werden (Division als fortlaufende Subtraktion). Gleichzeitig muss zur Vermeidung von Fehlern Buch geführt werden. Dabei ist nicht nur das dezimale Stellenwertsystem funktional, die Lernenden können zudem ihre prozessbezogene Kompetenz des mathematischen Darstellens erweitern.

Angesichts des Umfangs der vorliegenden Arbeit sei nachstehend nur auf die mathematischen Aspekte des Projekts eingegangen.

Den schulischen Richtlinien wird anhand dieser substantiellen mathematischen Herausforderung entsprochen: Der Inhaltsbereich der Zahlen und Operationen wird hier abgedeckt. So können je nach individuellem Vermögen Kompetenzen bzgl. der Zahlvorstellungen, der Operationsvorstellungen, des Kopfrechnens, des Zahlrechnens oder des Ziffernrechnens erweitert werden. Zugleich werden die prozessbezogenen Kompetenzen

(1) Problemlösen/kreativ sein (denn es ergeben sich mathematische Problemstellungen, wie etwa die Frage, wie mit 402 Äpfeln im Falle von 100 Lernenden umzugehen ist oder wie die natürlichen Zahlen strukturiert sind),
(2) Modellieren (denn die konkrete Aufgabenstellung muss in ein mathematisches Modell übertragen, bearbeitet, zurückgeführt und reflektiert werden),
(3) Darstellen/Kommunizieren (denn ermittelte Ergebnisse müssen geteilt und festgehalten werden) sowie das
(4) Argumentieren (denn im gegenseitigen Austausch muss sich begründet auf einen Lösungsweg geeinigt werden – ohne diesen Prozess wäre eine fortschreitende Schematisierung und Mathematisierung nicht möglich)

weiterentwickelt oder angebahnt. Diese Beschreibung zeigt, dass im Zuge entdeckenden Lernens verschiedene Strukturen auf verschiedenen Abstraktionsniveaus entdeckt werden können.

Insbesondere die inneren Strukturen verschieden mächtiger Mengen (verschiedene Teiler, Division mit Rest, …) sind hier anhand einer sinnstiftenden Aufgabe zu entdecken. Aber auch die Strukturen der in das Stellenwertsystem eingegangenen Abstraktionen können untersucht und angewandt werden. Diese werden in die Mittel hineingesehen (ideative Begriffsbestimmung) und werden mit ihrer Hilfe greifbar (abstraktive Begriffsbestimmung).

So kann etwa gefragt werden, warum eine Eins-zu-Eins-Zuordnung auch mithilfe der Bündel funktioniert. Diese Frage kann zum Beispiel in folgender Situation aufkommen. Zuerst wird die Anzahl der Schülerinnen und Schüler der Schule erhoben, zum Beispiel mittels einer Eins-zu-Eins-Zuordnung: ‚Wir stellen uns nach der Pause an die Tür und legen für jedes hereinlaufende Kind einen Würfel in unseren Korb'. Danach wird die Anzahl einer Klasse, zum Beispiel der Äpfel ebenfalls mithilfe einer Eins-zu-Eins-Zuordnung erhoben. Alternativ können auch die Äpfel selbst als kardinale Darstellung genutzt werden. Wenn einige Kinder diese Mengen nun zur selben Bündelungseinheit bündeln und herausfinden möchten, ob es mehr Äpfel oder mehr Kinder gibt, dann können sie auch die Bündel mittels einer Eins-zu-Eins-Zuordnung vergleichen. Im Zuge einer Reflexion dieser Handlung kann klar werden, dass (etwa im Falle einer Fünferbündelung) mit einer Eins-zu-Eins-Zuordnung *fünf* Eins-zu-Eins-Zuordnungen stellvertretend vorgenommen wurden. Eine solche Reflexion wäre der Abstraktionsstufe II zuzuordnen.

Doch inwiefern ist dieses Projekt hinsichtlich der führenden Tätigkeiten zu differenzieren?

Lernende sind *perzeptiv tätig*, wenn sie

- beobachten, wie eine Menge mit jedem hinzugefügten Element wächst (Sammeln),
- wahrnehmen, wie große unnatürliche Vielzahlen verhältnismäßig gleicher Elemente aussehen und sich anfühlen,
- wahrnehmen, dass physische Mengen begrenzt sind
- und wahrnehmen, wie verschiedene Elemente getrennt werden (Klassifikation).

Dabei bieten sich etwa im Zuge des Sammelns viele Möglichkeiten, pränumerische Vorläuferfertigkeiten zu entwickeln. So kann der Fragestellung ‚wie viele' der Anspruch an das Verständnis ebendieser Ziel der Auseinandersetzung sein. Denn im Zuge des Sammelns, räumlichen Sortierens und Klassifizierens können vielfältige motorische Erfahrungen gemacht werden, die die Ausbildung des Körperschemas begünstigen. Die Lernenden sind ganzheitlich tätig und können

im Zuge des Projekts vielfältige Sinnesreize verarbeiten und integrieren – an dieser Stelle kann ebenfalls mit therapeutischem Fachpersonal kooperiert werden. Gleichzeitig wird in tätiger Auseinandersetzung die Erkenntnis angebahnt, dass wahrnehmbare Mengen endlich sind.

Auch die Zone der nächsten Entwicklung ist erreichbar, da die Lernenden in Kleingruppen kooperieren. So werden kommunikative Kompetenzen angebahnt – die Lernenden kommen etwa mit Zahlwörtern in Kontakt.

Die Schülerinnen und Schüler können *manipulierend tätig* sein, wenn sie

- einzelne Elemente erkunden (Sammeln),
- Erfahrungen mit Sammelbehältern machen, indem Handlungen anderer nachgeahmt werden,
- handelnd erfassen, dass wahrnehmbare Mengen endlich sind oder
- mit mehreren Elementen einer Menge hantieren (Erfahrungen mit einem großen Haufen Haselnüsse machen).

Gegenständlich tätig können die Kinder hingegen sein, wenn sie

- eine Menge schrittweise vergrößern und verkleinern (Sammeln, Pflücken, Aussortieren),
- Eimer oder Körbe nutzen (um etwa große Mengen Bucheckern umzuschichten) oder
- erste Eins-zu-Eins-Zuordnungen anbahnen (etwa indem sie versuchen, in viele Eimer jeweils eine Kastanie zu legen).

Dabei können die Lernenden Erfahrungen machen, die weiter den Erkenntnissen zur Endlichkeit wahrnehmbarer Mengen, zur Mengeninvarianz und zur Teil-Ganzes-Beziehung dienlich sind. Mit diesen Erfahrungen werden ebenfalls die Grundvorstellungen der Addition und Subtraktion (Verbinden, Verändern, Vergleichen sowie Aus- und Angleichen) angebahnt.

Die Schülerinnen und Schüler können zudem *spielerisch tätig* sein, indem sie

- einzelne Elemente in Eimer werfen,
- versuchen, eine Menge schnellstmöglich anwachsen zu lassen (Sammeln, Pflücken),
- mittels Eins-zu-Eins-Zuordnung und Hilfsmengen vergleichen, wer mehr gesammelt hat,

- spielerisch Erfahrungen mit Zahlwörtern sammeln,
- den Gegenständen verschiedene Bedeutung zusprechen (Strukturieren, Klassifizieren) oder indem sie,
- durch Eins-zu-Eins-Zuordnungen verschiedene Mengen gleichmäßig aufteilen (Anbahnung der Grundvorstellung des Verteilens).

Lernend tätig werden können die Kinder, wenn sie

- während des Sammelns zählen,
- alle Schülerinnen und Schüler der Schule ermitteln,
- mithilfe verschiedener Zähl- und Rechenmittel Anzahlen festhalten,
- Mengen zusammenfügen,
- problemlösend und zunehmend systematisch vorgehen
- oder auf unterschiedlichste Weisen rechnen.

Zuletzt können die Lernenden *arbeitend tätig* werden, da sie durch das Sammeln, Klassifizieren, Zählen und Berechnen ein Produkt herstellen, während die Arbeitshandlungen geplant, durchgeführt und kontrolliert werden.

Während des Projekts können alle Lernenden mithilfe der ihnen gemäßen Keimzellen arbeiten. Dabei sind die bisher vorgestellten Keimzellen für die Lernenden anzupassen und mit ihnen zu variieren. So kann etwa die Keimzelle des Rechnens mit dem Prinzip des Stellenwerts (vgl. Abb. 20: Keimzelle des Rechnens mit dem Prinzip des Stellenwerts) variiert werden, indem nur die Begriffe ‚Bündel' und ‚Teil-Rechnen' genutzt werden, um die Abstraktion schnell zu veranschaulichen. Die nachfolgende Abbildung veranschaulicht eine mögliche Auseinandersetzung mit dieser Keimzelle. Diese könnte eine Schülerin oder ein Schüler im Unterricht erarbeitet und erweitert haben.

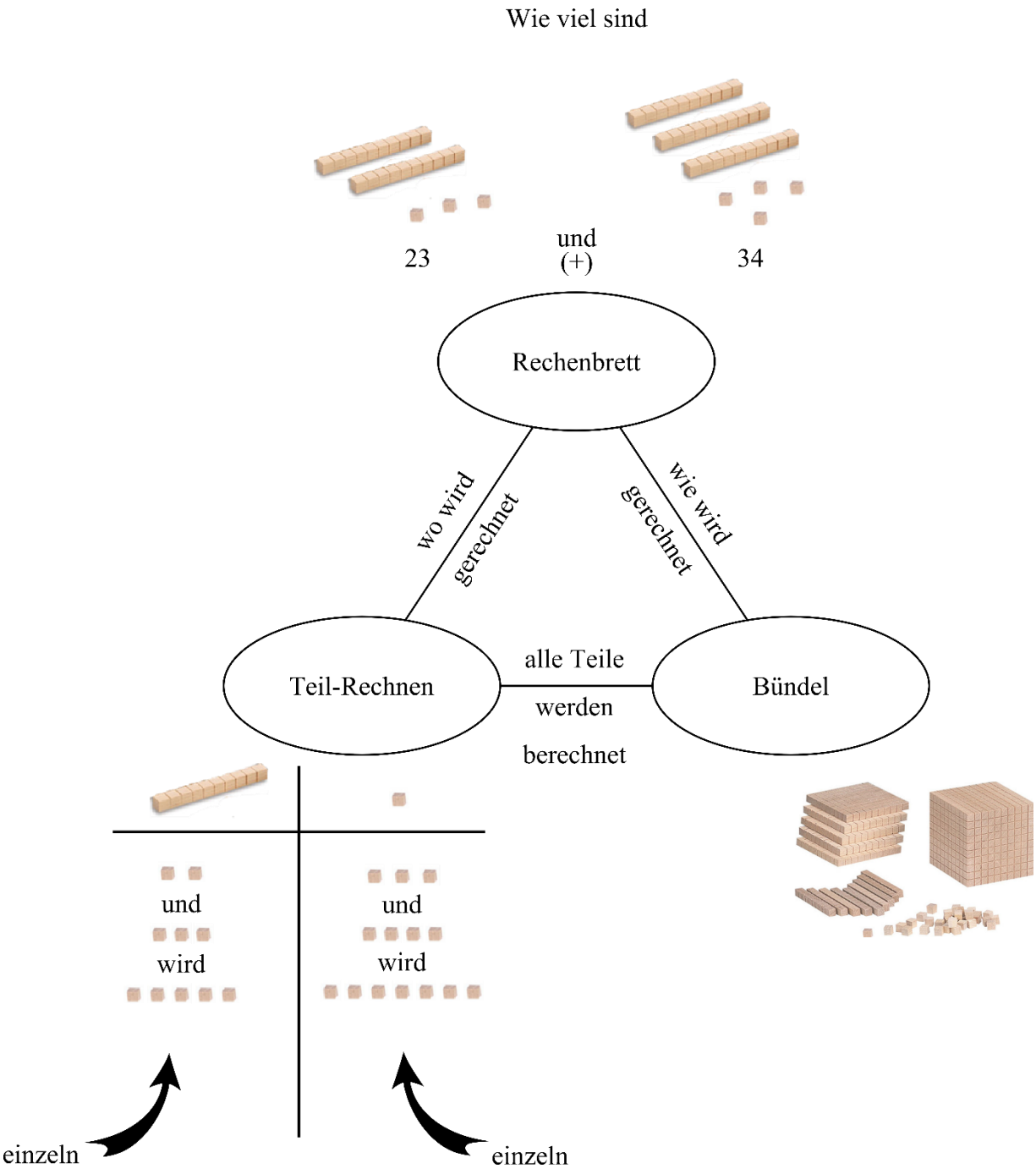

Abb. 26: : Beispiel für das Lernen mit einer Keimzelle zum Stellenwert. Fotos aus: Betzold (o.J., o.S.).

Im Sinne der pädagogischen Diagnostik ist im Zuge der Projektdurchführung wichtig, den Stand jedes/jeder einzelnen Lernenden abzuschätzen, damit hinsichtlich invarianten Unterrichts die nächste Abstraktionsstufe möglichst mittels der Invarianten eingeführt werden kann. Allerdings ergeben sich im Zuge der Kooperation entsprechend einer natürlichen Differenzierung parallel

weitere Möglichkeiten, auf höheren Abstraktionsstufen tätig zu sein. Dies entspricht dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung und Mathematisierung. Zugleich können durch die Akzeptanz und Verfügbarkeit verschiedener Zugänge auch Mittel ‚niedrigerer Niveaustufen' genutzt werden. Dies scheint dann notwendig zu sein, wenn innerhalb der höheren Abstraktionsstufe Anschaulichkeit und somit Verständnis fehlt.

Diese Freiheit der Lernenden ist zugleich stetig dahingehend zu reflektieren, ob Lernende in Gruppenprozessen ausgeschlossen werden und ob das Handlungsniveau jedes/jeder einzelnen angemessen ist, um neue Kompetenzen anzubahnen. Dazu ist auch die etappenweise Interiorisierung zu bedenken, dass also neben der Motivierung und Schaffung einer Orientierungsgrundlage Hilfen angeboten werden, die die materialisierte Handlung sprachlich und begrifflich stützen und helfen, die äußere Sprache in eine innere Sprache zu wandeln. Der diagnostische Blick auf die Lernenden ist daher in einem eher offenen Unterricht von besonderer Bedeutung.

4 Fazit & Ausblick (Rosemann & Schwarzenberg)

In der vorliegenden Arbeit wurde entsprechend der Ebenen der MRD Theorien dargestellt, die helfen können, den inklusiven Prozess zu reflektieren. Zudem sind Unterrichtsimpulse für den inklusiven Stellenwertunterricht in maximal heterogenen Lerngruppen entwickelt und vorgestellt worden. Es ist ein Jahrgangsstufen übergreifender Projektunterricht erarbeitet worden, in dem die Lernenden entlang des Themas ‚Überraschungstüte für den Martinstag' mathematisch tätig werden können.

Die erarbeiteten aufsteigenden Abstraktionen hin zum Stellenwertsystem wurden mittels Keimzellmodellen visualisiert. Zugleich wurden Möglichkeiten der Umsetzung skizziert. Hierbei ist eine Differenzierung entlang der führenden Tätigkeiten in Orientierung auf die Zone der nächsten Entwicklung im kulturhistorischen Sinne hergeleitet und skizziert worden.

Eine Chance dieser Darstellungen bezüglich der Umsetzung eines wahrhaft inklusiven Unterrichts besteht zum einen in der Zusammenführung von ausgewählten Aspekten aus der kulturhistorischen Didaktik und der Didaktik der Mathematik, zum anderen in der Einbettung von verschiedenen theoretischen Perspektiven in die MRD und die damit verbundene reflexive Durchdringung des Gesamtprozesses.

In den didaktisch fundierten Unterrichtsimpulsen werden die in der Phylogenese des Stellenwertsystems verlaufenen Problemlöseprozesse aufgegriffen. Als Orientierungsgrundlage und als Mittel nutzen und verändern die Lernenden Keimzellmodelle. Diese fungieren als Ausgangsabstraktionen und können im weiteren Verlauf des Unterrichts ausdifferenziert und vertieft werden. Hierbei kommt den mathematikdidaktischen Ausführungen zu den fundamentalen Ideen, zur fortschreitenden Schematisierung und Mathematisierung sowie zum Aufbau von mathematischen Begriffen Bedeutung zu.[21] Denn fundamentale Ideen greifen – wie dargestellt – auf invariante Strukturen zurück. Diese Strukturen gehen in die Bildung mathematischer Begriffe ein. Die fortschreitende Schematisierung und Mathematisierung wurde – wie gezeigt – auch in der Phylogenese der Zahl und des Stellenwertsystems vollzogen und ist bzgl. der Ontogenese als ein zentraler Prozess in der Auseinandersetzung mit invarianten Strukturen der fundamentalen

[21] Auch wenn der gewählte Ausgangspunkt der Arbeit weniger das unreflektierte Empirische ist, sondern bereits eine Ausgangsabstraktion theoretischer Herkunft entsprechend der didaktischen Überlegungen aus der kulturhistorischen Schule genutzt wird.

Ideen *Zahl* und *Stellenwertsystem* zu sehen. Hier bilden sich fortschreitend schematischere mathematische Begriffe.

Die fünf Ebenen der MRD helfen, einen möglichst holistischen reflexiven Blick auf den Unterricht und die Lernwirklichkeit von Schülerinnen und Schülern zu richten.

Außerdem ist herausgearbeitet worden, dass gerade für die Realisierung inklusiver Bildungsprozesse die eigene Haltung, das Menschenbild und das zugrundliegende Entwicklungsverständnis wiederkehrend reflektiert werden müssen. Die Reflexion der eigene Standpunkte und der Standpunkte des Teams sowie der Wirkungen dieser Standpunkte sind unerlässlich, um den Lernenden ein Unterrichtsangebot in ihrer jeweils individuellen Zone der nächsten Entwicklung und in Orientierung auf ihre führende Tätigkeit zu unterbreiten.

Gleichzeitig ist neben der eigenen Haltung essentiell, Strukturen politischer, rechtlicher oder kultureller Art zu kennen und sich mit diesen kritisch-reflektierend auseinanderzusetzen. Dies betrifft vor allem die Makrostruktur, die zwar nicht direkt beeinflussbar ist, aber die Lebenswirklichkeit im System Schule maßgeblich beeinflusst. In Hinblick auf die Überwindung des selektierenden, segregierenden und sich dadurch auch in sog. inklusiven Systemen selbsterhaltenden EBUs im Sinne Georg Feusers und hinsichtlich der sozialen Behinderungsgenese muss dieses System verändert werden. In Teilen – etwa bzgl. der inneren Differenzierung – können auch die Lehrkräfte das EBU verändern. Zugleich ist zu konstatieren, dass die Umsetzung eines wahrhaft inklusiven Unterrichts hohe Anforderungen an die pädagogischen und didaktischen Kompetenzen der Lehrkräfte stellt.

Zugleich erscheint die Bereitstellung adäquater Ressourcen im System Schule kurzfristig wenig wahrscheinlich. Die dargestellten Überlegungen und Forderungen können nur in einem System realisiert werden, in dem Zeit für Individualisierung und Differenzierung, für pädagogische Diagnostik und für Hilfen in der Zone der nächsten Entwicklung gewährt wird.

Nichtsdestotrotz trägt das hohe zu erreichende Maß an Reflexivität durch die MRD zu einer Steigerung der eigenen Möglichkeiten (Empowerment der Lehrkräfte) sowie des Verantwortungsbewusstseins der pädagogischen Fachkräfte hinsichtlich ihrer anspruchsvollen Rolle bei und bietet Chancen, konstruktiv und anerkennend entwicklungs- und zukunftsorientiert weiterzudenken.

Diese Arbeit soll einen Beitrag zur Realisierung inklusiven Unterrichts leisten, der Heterogenität in jeglicher Facette anerkennt und wertschätzt.

Die erarbeiteten aufsteigenden Abstraktionen sind in dieser Arbeit aufwendig hergeleitet und diskutiert worden. Dabei sind weitere Überlegungen in den Hintergrund getreten, auch wenn diese ebenfalls für einen inklusiven Stellenwertunterricht bedeutsam gewesen wären. Weitere Aspekte müssten jedoch tiefergehend hinsichtlich der Invarianten durchdacht und reflektiert werden. Dies wäre in fortführenden Überlegungen eine zu leistende Aufgabe. Aus diesem Grunde werden einige nicht berücksichtigte Überlegungen kurz, unvollständig und andeutungsweise skizziert.

Exemplarisch sei auf *Zähler*, wie bspw. in Zählwerken, als Gegenstand für den Unterricht verwiesen, der zwar auf formal-symbolische Zahldarstellungen zugreift und ein erstes Verstehen für das Stellenwertsystem voraussetzt. Aber gerade in Verbindung mit dem handelnden und enaktiven Umgang mit Mehrsystemblöcken ist hier eine verstehende Durchdringung der kardinalen (verkörpert durch die Mehrsystemblöcke, Einer-Steine oder den Zählerstand) sowie der ordinalen Zahldarstellung (Handeln mit einem Zähler sowie mit Mehrsystemblöcken) möglich.

Anknüpfungspunkte hierzu kann auch der Musikunterricht bieten bzw. das Hören und Produzieren von Rhythmen, die zur Illustration der Bewegung des Zählwerks dienen können. Auch im Sportunterricht können durch rhythmische Bewegungsspiele ordinale Zahldarstellungen erkundet werden – so wäre eine Simulation eines Zählers durch Handlungen der Lernenden in Kooperation vorstellbar. Hierbei ist aber gründlich zu überlegen, wie ein solches Bewegungsspiel gestaltet werden könnte, sodass auch Lernende, deren führende Tätigkeit weder im Spiel noch im Lernen liegen, miteinbezogen und ihnen sinnstiftende Lernerfahrungen ermöglicht werden können.

In Verbindung mit dem Werkunterricht ist es möglich einen Zähler selbst herzustellen und dadurch vertiefende Einsicht in die dahinterstehenden Prozesse zu erlangen. Im Sachunterricht oder im Falle sachrechnerischer Rechenanlässe können verschiedene Zähler und ihre Verwendung in der Lebenswirklichkeit erfahren und reflektiert werden. Gleichzeitig können Zähler zum Ausgangspunkt von rechnerischen Erkundungen gemacht werden.

Greift man nun den Zahlenraum bis 1.000.000 auf, der in der Grundschulzeit erkundet und angebahnt werden soll, so kann die erweiterte Stellenwerttafel mit ikonischen Symbolen für die Potenzen 1.000, 10.000, 100.000 und 1.000.000 realisiert werden. Auch eine Darstellung durch Mehrsystemblöcke ist möglich. Hierbei ist die vertiefende Erkenntnis notwendig, dass ein einzelner Tausender-Würfel die 1000, eine Stange aus zehn Tausenderwürfeln die 10.000, eine Platte aus Tausenderwürfeln die 100.000 und ein Tausend-Tausenderwürfel schließlich die 1.000.000 darstellt. Hier können in der Weiterführung auch multiplikative Aspekte der Zahldarstellung des erweiterten Zahlenraums behandelt werden, der bis zum Ende der Jahrgangsstufe vier in den Grundschullehrplänen angestrebt wird.

Auch eine Verbindung mit dem Kunstunterricht ist an dieser Stelle denkbar. Durch das Stempeln mit strukturierten Mehrsystemblöcken können Abdrücke aller Stellen kardinal dargestellt werden (als Resultate eines Prozesses), während der Produktionsprozess hingegen ordinaler, also zählender und erzeugender Natur ist. Dies würde vor allem die Verbindung von prädikativ- und funktional-logischem Zurechtlegen und Denken entsprechen sowie gleichzeitig durch enaktives Vorgehen eine ikonische Darstellung erzeugen. Weiterhin kann innerhalb dieses Vorgehens auch der Zähler eingebracht werden, da dieser kompakter auf die Mechanismen der Stellenwerttafel zurückgreift. Gleichzeitig können Zähler – wie dies M. Gossweiler (2014) zeigt – auch für das Anbahnen von Einsichten in die Bruchrechnung genutzt werden (vgl. ebd., 42ff.). Dies stellt eine Verbindung zu den Bildungsstandards und den Grundschulmathematiklehrplänen dar, die anschlussfähig an die Sekundarstufe I formuliert sind.

Diese skizzierten Vorgehensweisen können ebenfalls in einen handlungs- und/oder projektorientierten Unterricht eingebettet werden, der die Kooperation am Gemeinsamen Gegenstand umsetzt und sich mit jeder Ebene der MRD auseinandersetzt.

In Zukunft wäre vor allem die Ausarbeitung der Differenzierung entlang führender Tätigkeiten weiter auszuarbeiten. Gleichzeitig sollten weitere Keimzellmodelle für die Lernenden erarbeitet werden.

Auch der Modellansatz der aufsteigenden Abstraktionen des Stellenwertsystems in Verbindung von Phylogenese und Ontogenese muss zukünftig durch weitere Erkenntnisse bezüglich der ontogenetischen Erwerbsvoraussetzungen erweitert werden. Insbesondere im Bereich der mathe-

matischen Vorläuferfähigkeiten innerhalb der Ontogenese besteht Forschungsbedarf hinsichtlich ihrer Komponenten. Auch der Zusammenhang mit dem Erwerb mathematischer Begriffe wäre hier zu betrachten. Damit verbunden sind diagnostische Fragestellungen und es bleibt zu fragen, inwiefern das in dieser Arbeit entwickelte Modell phylo- und ontogenetischer Entwicklung diagnostisch eingesetzt werden kann.

Insgesamt wurden angesichts des Umfangs dieser Arbeit nur Teile der beschriebenen aufsteigenden Abstraktionen genutzt, um problemorientierte Unterrichtsbeispiele zu erarbeiten – eine weitere Ausarbeitung ist zukünftig noch zu leisten.

Literaturverzeichnis

Ayres, Anna Jean (2013): Bausteine der kindlichen Entwicklung. Sensorische Integration verstehen und anwenden. Das Original in moderner Neuauflage (5., überarbeitete und erweiterte Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Benz, Christiane; Peter-Koop, Andrea; Grüßing, Meike (2015): Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen. Berlin/ Heidelberg: Springer Spektrum.

Betzold (o.J.): Zehnersystem Teile aus Holz. Zugriff am 13.08.2018. Zugriff unter: https://static.betzold.de/images/prod/A_1553/Zehnersystem-Teile-aus-Holz-A_1553_bdefos-XL.jpg

Beutelspacher, Albrecht (2018): Zahlen, Formeln, Gleichungen. Algebra für Studium und Unterricht. Wiesbaden: Springer.

Bielefeld, Tanja (2012): Radikal-Lokales Lehren und Lernen – die Konzeption von Mariane Hedegaard & Seth Chaiklin. In: Jantzen, Wolfgang (Hrsg.): Kulturhistorische Didaktik. Rezeption und Weiterentwicklung in Europa und Lateinamerika. Berlin: Lehmanns Media, 62-113.

Bormann, Susanna (2004): Gal'perins Schule heute – neue Forschungen zum Verhältnis von Wissenschaft und Unterricht in der russischen Psychologie. In: Jantzen, Wolfgang (Hrsg.): Die Schule Gal'perins. Tätigkeitstheoretische Beiträge zum Begriffserwerb im Vor- und Grundschulalter. Bd. 8. ICHS. Berlin: Lehmanns Media, 53-150.

Bourdieu, Pierre (1983): Ökonomisches Kapital, kulturelles Kapital, soziales Kapital. In Kreckel, Reinhard (Hrsg.): Soziale Ungleichheiten. Soziale Welt, Sonderband 2, Göttingen: Verlag Otto Schwartz, 183–198.

Bruner, Jerome S. (1977): The Process of Education. Cambridge/London: Harvard University Press.

Budde, Jürgen (2017): Heterogenität: Entstehung, Begriff, Abgrenzung. In: Bohl, Thorsten/Budde, Jürgen/Rieger-Ladich, Markus (Hrsg.): Umgang mit Heterogenität in Schule und Unterricht. Grundlagentheoretische Beiträge, empirische Befunde und didaktische Reflexionen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 13-26.

Bundesministerium für Arbeit und Soziales (2018): Umsetzungsbegleitung Bundesteilhabegesetz. Zugriff am 07.06.2018. Verfügbar unter: https://umsetzungsbegleitung-bthg.de

Bundesministerium für Arbeit und Soziales (o.J.) (Hrsg.): Die UN-Behindertenrechtskonvention. Übereinkommen über die Rechte von Menschen mit Behinderungen. Zugriff am 10.06.2018. Verfügbar unter: http://www.bmas.de/

Bundschuh Konrad (2013a): Diagnostik. In: Theunissen, Georg/Kulig, Wolfram/Schirbort, Kerstin (Hrsg.): Handlexikon Geistige Behinderung. Schlüsselbegriffe aus der Heil- und Sonderpädagogik, Sozialen Arbeit, Medizin, Psychologie, Soziologie und Sozialpolitik. Stuttgart: Kohlhammer, 74-75.

Bundschuh Konrad (2013b): Förderdiagnostik. In: Theunissen, Georg/Kulig, Wolfram/Schirbort, Kerstin (Hrsg.): Handlexikon Geistige Behinderung. Schlüsselbegriffe aus der Heil- und Sonderpädagogik, Sozialen Arbeit, Medizin, Psychologie, Soziologie und Sozialpolitik. Stuttgart: Kohlhammer, 115-116.

Bundschuh, Konrad/Heimlich, Ulrich/Krawitz, Rudi (2007) Förderung. In: dies. (Hrsg.): Wörterbuch Heilpädagogik. Klinkhardt: UTB, 76-79.

Bundy, Anita C./Murray, Elizabeth A. (2007): Sensorische Integration: Jean Ayres' Theorie aus heutiger Perspektive. In: Bundy, Anita C./Lane, Shelly J./Murray, Elizabeth A. (Hrsg.): Sensorische Integrationstherapie. Theorie und Praxis (3., vollständig überarbeitete Auflage). Heidelberg: Springer Medizin Verlag, 3-36.

Crenshaw, Kimberlé W. (2013): Die Intersektionalität von „Rasse“ und Geschlecht demarginalisieren: Eine Schwarze feministische Kritik am Antidiskriminierungsrecht, der feministischen Theorie und der antirassistischen Politik. In: Lutz, Helma/Supik, Linda/ Vivar, María Teresa Herrera (Hrsg.): Fokus Intersektionalität. Bewegungen und Verortungen eines vielschichtigen Konzeptes (2. Auflage). Wiesbaden: Springer VS, 35- 58.

Dantzig, Tobias (2005): Number. The Language of Science. Kommentierte Ausgabe der 4. Aufl. New York: Pearson.

Dawydow, Wassili W. (1972): Über das Verhältnis zwischen abstrakten und konkreten Kenntnissen im Unterricht. In: Lompscher, Joachim (Hrsg.): Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen. Neuere Untersuchungen zur Anwendung der Lerntheorie Galperins. Berlin: Volk und Wissen, 241-260.

Dehaene, Stanislas (1999): Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. Basel/ Boston/ Berlin: Birkhäuser.

Deutsche UNESCO-Kommission e.V. (DUK) (Hrsg.) (2014): Inklusion: Leitlinien für die Bildungspolitik (3. erweiterte Aufl.). Bonn: Dt. UNESCO-Kommission. Zugriff am 17.08.2018. Verfügbar unter: https://www.unesco.de/sites/default/files/2018-05/2014_Leitlinien_inklusive_Bildung_0.pdf

Deutsches Institut für Medizinische Dokumentation und Information (2005): Internationale Klassifikation der Funktionsfähigkeit, der Behinderung und Gesundheit. Zugriff am 07.06.2018. Verfügbar unter: https://www.dimdi.de/dynamic/de/klassi/downloadcenter/icf/stand2005/

Deutsches Institut für Medizinische Dokumentation und Information (2018) (Hrsg.): ICD-10-GM-2018. Zugriff am 02.06.2018. Verfügbar unter: http://www.icd-code.de/

Everett, Daniel (2005): Cultural Constraints on Grammar and Cognition in Pirahã. Another Look at the Design Features of Human Language. In: Current Anthropology Vol. 46 (4): 621-646.

Feuser, Georg (1995): Behinderte Kinder und Jugendliche zwischen Integration und Aussonderung. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Feuser, Georg (2013): Die „Kooperation am Gemeinsamen Gegenstand“ – ein Entwicklung induzierendes Lernen. In: Feuser, Georg/Kutscher, Joachim (Hrsg.): Entwicklung und Lernen. Bd. 7. Behinderung, Bildung, Partizipation. Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik. Stuttgart: Kohlhammer, 282-293.

Feuser, Georg/Ling, Karen/Ziemen, Kerstin (2013): Geistige Behinderung als gesellschaftliche und soziale Konstruktion. In: Feuser, Georg/Kutscher, Joachim (Hrsg.): Entwicklung und Lernen. Bd. 7. Behinderung, Bildung, Partizipation. Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik. Stuttgart: Kohlhammer, 345-356.

Fornefeld, Barbara (2013): Grundwissen Geistigbehindertenpädagogik (5. Auflage). München/Basel: Ernst Reinhardt.

Freudenthal, Hans (1984): Wie alt ist der Kapitän? In mathematiklehren, 5/1984, 38-39.

Fromme, Marina (2017): Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Fuson, Karen (1988): Children’s counting and concepts of number. New York: Springer.

Fuson, Karen/Wearne, Diana/Hiebert, James/Murray, Hanlie/Human, Pieter/Olivier, Alwyn/Carpenter, Thomas/Fennema, Elizabeth (1997): Children’s Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. In: Journal for Research in Mathematics Education 28 (2), 130-162.

Gal’perin, Pjotr J. (2004): Zur Untersuchung der intellektuellen Entwicklung des Kindes. In: Jantzen, Wolfgang (Hrsg.): Die Schule Gal’perins. Tätigkeitstheoretische Beiträge zum Begriffserwerb im Vor- und Grundschulalter. Bd. 8. ICHS. Berlin: Lehmanns Media, 15-30.

Geise, Christina (2012): Entwickelnder Unterricht in der Konzeption von Mariane Hedegaard. In: Jantzen, Wolfgang (Hrsg.): Kulturhistorische Didaktik. Rezeption und Weiterentwicklung in Europa und Lateinamerika. Berlin: Lehmanns Media, 14-61.

Gelman, Rochel/Gallistel, Charles R. (1978): The Childs’s Understanding of Number. Cambridge/ Massachusetts/ London: Harvard University Press.

Gerster, Hans-Dieter; Schultz, Rita (2004): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Überarbeitet und erweitert im Mai 2000, Auflage Mai 2004. Freiburg: Pädagogische Hochschule Freiburg.

Gossweiler, Martin (2014): Der Zähler als Kernidee für das Dezimalsystem. In: Gallin, Peter/Ruf, Urs (Hrsg.): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Spuren legen - Spuren lesen. Un-terricht mit Kernideen und Reisetagebüchern. Bd. 2. Seelze-Velber: Kallmeyer, 42-45.

Halmos, Paul (1994): Naive Mengenlehre. 5. Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Hefendehl-Hebeker, Lisa/Schwank, Inge (2015): Arithmetik: Leitidee Zahl. In: Bruder, Regina/ Hefendehl-Hebeker, Lisa/ Schmidt-Thieme, Barbara/Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum, 77-115.

Heinen, Norbert (2003): Überlegungen zur Didaktik mit Menschen mit schwerer Behinderung. In: Fröhlich, Andreas/Heinen, Norbert/Lamers, Wolfgang (Hrsg.): Schulentwicklung - Gestaltungs(t)räume in der Arbeit mit schwer behinderten Schülerinnen und Schülern. Texte zur Körper- und Mehrfachbehindertenpädagogik. Düsseldorf. 121-143.

Heinze, Sigrid (2010): Kulturhistorische Konzepte für den entwickelnden und integrativen Erstunterricht. In: Siebert, Birger (Hrsg.): Integrative Pädagogik und die Kulturhistorische Theorie. Frankfurt am Main: Peter Lang, 275-292.

Hierdeis, Helmwart (2017): Erziehung. In: Kerstin Ziemen (Hrsg.): Lexikon Inklusion. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 70-71.

Hinz, Andreas (2013): Geistige Entwicklung. In: Theunissen, Georg/Kulig, Wolfram/Schirbort, Kerstin (Hrsg.): Handlexikon Geistige Behinderung. Schlüsselbegriffe aus der Heil- und Sonderpädagogik, Sozialen Arbeit, Medizin, Psychologie, Soziologie und Sozialpolitik. Stuttgart: Kohlhammer, 138

Hitz, Peter; Hotz, Arturo; Ludwig, Gudrun (2005): Gleichgewicht. 2. Auflage. Schorndorf: Karl Hofmann.

Hoffmann, Thomas (2008): Gegenstand und Motiv – Vom Nutzen der Tätigkeitsanalyse für eine entwicklungsorientierte Didaktik. In: Ziemen, Kerstin (Hrsg.): Reflexive Didaktik. Annäherungen an eine Schule für alle. Oberhausen: ATHENA-Verlag, 173-194.

Ifrah, Georges (1991): Universalgeschichte der Zahlen (2. Auflage). Frankfurt am Main/ New York: Campus.

Jantzen, Wolfgang (1987): Allgemeine Behindertenpädagogik. Sozialwissenschaftliche und psychologische Grundlangen. Bd. 1.Weinheim/Basel: Beltz.

Jantzen, Wolfgang (1990): Allgemeine Behindertenpädagogik. Neurowissenschaftliche Grundlagen, Diagnostik, Pädagogik und Therapie. Bd. 2. Weinheim/ Basel: Beltz.

Jantzen, Wolfgang (2004): Möglichkeiten und Chancen gemeinsamen Unterrichts von behinderten und nichtbehinderten Kindern: Didaktische Grundfragen. In: Ders. (Hrsg.): Die Schule Gal'perins. Tätigkeitstheoretische Beiträge zum Begriffserwerb im Vor- und Grundschulalter. Bd. 8. ICHS. Berlin: Lehmanns Media, 31-52.

Jantzen, Wolfgang (2006): Vorwort. In: Siebert, Birger (Hrsg.): Begriffliches Lernen und entwickelnder Unterricht. Grundzüge einer kulturhistorischen Didaktik für den integrativen Unterricht. Berlin: Lehmanns Media, .11-16.

Jantzen, Wolfgang (2012): Diagnostik, Dialog und Rehistorisierung: Methodologische Bemerkungen zum Zusammenhang von Erklären und Verstehen im dialogischen Prozess. In: Jantzen, Wolfgang/ Lanwer, Willehad (Hrsg.) Diagnostik als Rehistorisierung. Methodologie und Praxis einer verstehenden Diagnostik am Beispiel schwer behinderter Menschen (2. unveränderte Auflage). Berlin: Lehmanns Media, 9-32.

Jantzen, Wolfgang (2013a): Evolution und Entwicklung des Psychischen. In: Siebert, Birger (Hrsg.): Integrative Pädagogik und die Kulturhistorische Theorie. Frankfurt am Main: Peter Lang, 17-42.

Jantzen, Wolfgang (2013b): Neuropsychologie der geistigen Behinderung. In: Feuser, Georg/Kutscher, Joachim (Hrsg.): Entwicklung und Lernen. Bd. 7. Behinderung, Bildung, Partizipation. Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik. Stuttgart: Kohlhammer, 335-339.

Jantzen, Wolfgang/Lanwer, Willehad (2012): Vorwort. In: Dies. (Hrsg.) Diagnostik als Rehistorisierung. Methodologie und Praxis einer verstehenden Diagnostik am Beispiel schwer behinderter Menschen (2. unveränderte Auflage). Berlin: Lehmanns Media, 3-8.

Jödeke, Manfred (2017): Kulturhistorische Schule. In: Kerstin Ziemen (Hrsg.): Lexikon Inklusion. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 164-166.

Kaplan, Robert (2005): Die Geschichte der Null. 5. Auflage. München: Pieper.

Katzenbach, Dieter (2017): Inklusion und Heterogenität. In: Bohl, Thorsten/Budde, Jürgen/Rieger-Ladich, Markus (Hrsg.): Umgang mit Heterogenität in Schule und Unterricht. Grundlagentheoretische Beiträge, empirische Befunde und didaktische Reflexionen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 123- 140.

Kluge, Friedrich (2011): Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache (25., durchgesehene und erweiterte Auflage). Berlin: De Gruyter.

Kölbl, Carlos (2006): Die Psychologie der kulturhistorischen Schule. Vygotskij, Lurija, Leont'ev. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kölbl, Carlos (2010): Kulturhistorische Schule. In: Mey, Günter; Mruck, Katja (Hrsg.): Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie. Wiesbaden: Springer, 182-194.

Korff, Natascha (2015): Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe. Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Kuhlmann, Carola (2018): Bildungsarmut und die soziale ‚Vererbung' von Ungleichheiten. In: Huster, Ernst-Ulrich/Boeckh, Jürgen/Mogge-Grotjahn, Hildegard (Hrsg.): Handbuch Armut und soziale Ausgrenzung. Wiesbaden: Springer VS, 431-456.

Lamers, Wolfgang/Heinen, Norbert (2006): Bildung mit ForMat. In: Laubenstein, Désirée/Lamers, Wolfgang/Heinen, Norbert (Hrsg.): Basale Stimulation kritisch-konstruktiv. Düsseldorf: verlag selbstbestimmtes Leben, 141-206.

Lehrstuhl für Pädagogik bei Lernbeeinträchtigungen - Sonderpädagogik I der Universität Würzburg (o.J): Erläuterungen zum KUNO-Fake und dessen Rezeption. Zugriff am 27.06.2018. Verfügbar unter: http://www.sopaed-lern.uni-wuerzburg.de/der-kuno-fake/

Lompscher, Joachim (2004): Lernkultur Kompetenzentwicklung aus kulturhistorischer Sicht. Lernen Erwachsener im Arbeitsprozess. Berlin: Lehmanns Media.

Lorenz, Jens Holger (2003): Wider die rote Tinte. Wie man mit Fehlern klug wird. In: Praxis Grundschule, 2/2003, 13-20.

Lurija, Aleksandr (1993): Romantische Wissenschaft. Forschungen im Grenzbezirk von Seele und Gehirn. Hamburg: Rowohlt.

Manske, Christel (2010): Gemeinsames Lernen aller Kinder: Die Differenz ist anerkannt. In: Siebert, Birger (Hrsg.): Integrative Pädagogik und die Kulturhistorische Theorie. Frankfurt am Main: Peter Lang, 215-222.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (1996) (Hrsg.): Richtlinien und Lehrpläne für die Schule für Geistigbehinderte (Sonderschule) in Nordrhein-Westfalen (unveränderter Nachdruck). Frechen: Ritterbach.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008a): Kompetenzorientierung – Eine veränderte Sichtweise auf das Lehren und Lernen in der Grundschule. Handreichung. Frechen: Ritterbach.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008b) (Hrsg.): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Frechen: Ritterbach.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2016): Schulgesetz für das Land Nordrhein-Westfalen (Schulgesetz NRW – SchulG). Vom 15. Februar 2005 zuletzt geändert durch Gesetz vom 6. Dezember 2016). Zu-griff am 17.08.2018. Verfügbar unter: https://www.schulministerium.nrw.de/docs/Recht/Schulrecht/Schulgesetz/Schulgesetz.pdf

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2018a): Das Schulwesen in Nordrhein-Westfalen aus quantitativer Sicht. 2017/18. Statistische Übersicht Nr. 399 – 1. Auflage. Zugriff am 17.08.2018. Verfügbar unter: https://www.schulministerium.nrw.de/docs/bp/Ministerium/Service/Schulstatistik/Amtliche-Schuldaten/Quantita_2017.pdf

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2018b) (Hrsg.): Gültigkeitsliste Richtlinien, Lehrpläne, Rahmenlehrpläne und Bildungspläne. Erftstadt: Ritterbach.

Montessori, Maria (2000): Psychoarithmetik. Psico Aritmetica – Die Arithmetik dargestellt unter Berücksichtigung kinderpsychologischer Erfahrungen während 25 Jahren. Volken/ Zürich: edition paeda media.

Pitsch, Hans-Jürgen/Thümmel, Ingeborg (2005): Handeln im Unterricht. Zur Theorie und Praxis des handlungsorientierten Unterrichts mit Geistigbehinderten. Oberhausen: Athena.

Rahde, Markus (2012): Die Lernstrategie vom Abstrakten zum Konkreten im Werk von Joachim Lompscher. In: Jantzen, Wolfgang (Hrsg.): Kulturhistorische Didaktik. Rezeption und Weiterentwicklung in Europa und Lateinamerika. Berlin: Lehmanns Media, 168-235.

Ratz, Christoph (2009): Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht bei Schülern mit geistiger Behinderung. Eine qualitative Studie am Beispiel von mathematischen Denk-spielen. Oberhausen: Athena.

Ratz, Christoph/Wittmann, Erich Ch. (2011): Mathematisches Lernen im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In: Ratz, Christoph (Hrsg.): Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Fachorientierung und Inklusion als didaktische Herausforderungen. Oberhausen: Athena, 129-152.

Ricken, Gabi/Schuck, Karl Dieter (2011): Pädagogische Diagnostik und Lernen. In: Kaiser, Astrid/Schmetz, Dietmar/Wachtel, Peter/Werner, Birgit (Hrsg.): Didaktik und Unterricht. Bd. 4 Behinderung, Bildung, Partizipation. Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik. Stuttgart: Kohlhammer, 110-119.

Rödler, Klaus (2006): Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Rödler, Peter (2017): Stolpern fördert! Überlegungen zur „evidence based science“ im Nachgang zu dem „Fake-Artikel“ KUBA in der ZfH11/2016. In: Behindertenpädagogik, 1/2017, 17-38.

Sacks, Oliver (2010): Der Mann, der seine Frau mit einem Hut verwechselte (31. Auflage). Hamburg: Rowohlt.

Schneider, Wolfgang; Küspert, Petra; Krajewski, Kristin (2016): Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen (2., aktualisierte und erweiterte Auflage). Paderborn: Ferdinand Schöningh.

Schwank, Inge (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 3/2003, 70-78.

Schwank, Inge (2008). Mathematiklernen: Die verkannte Bedeutung des sprachlosen Denkens. In: Kliemann, Sabine (Hrsg.): Diagnostizieren und Fördern in der Sekundarstufe I – Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen. Berlin: Cornelsen Scriptor, 174-185.

Schwank, Inge (2011): Mathematisches Grundverständnis: Denken will erlernt werden. In: Keller, Heidi (Hrsg.): Handbuch der Kleinkindforschung (4. vollständig überarbeitete Auflage.). Bern: Hans Huber, 1154-1174.

Schwank, Inge (2013a): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In: Aster, Michael von & Lorenz, Jens Holger (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik (2., überarb. und erw. Aufl.). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 93-138.

Schwank, Inge (2013b): Kleine Einsen und ein Wunderwerk. Die Zwergen-Mathe-Olympiade. In: Grundschule 11/2013, 16-19.

Schwank, Inge (2013c): Erstes Rechnen. Grundgedanken zur Mathematischen Frühförderung. Zugriff am 24.06.2018. Verfügbar unter: http://www.mathedidaktik.uni-koeln.de/11357.html

Schwill, Andreas (2001): Fundamentale Ideen der Informatik. Zugriff am 03.08.2018. Verfügbar unter: http://www.informatikdidaktik.de/Forschung/Schriften/ZDM.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (1994): Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung in den Schulen der Bundesrepublik Deutschland. Zugriff am 09.06.2018. Verfügbar unter https://www.kmk.org/

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). München/Neuwied: Wolters Kluwer.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2010): Pädagogische und rechtliche Aspekte der Umsetzung des Über-einkommens der Vereinten Nationen vom 13. Dezember 2006 über die Rechte von Menschen mit Behinderungen (Behindertenrechtskonvention – VN-BRK) in der schulischen Bildung. Zugriff am 09.06.2018. Verfügbar unter: https://www.kmk.org/

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2011): Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in Schulen. Zugriff am 09.06.2018. Verfügbar unter https://www.kmk.org/

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2018): Sonderpädagogische Förderung in Schulen 2007-2016. Zugriff am 09.06.2018. Verfügbar unter https://www.kmk.org/

Selter, Christoph (1994): Jede Aufgabe hat eine Lösung. Vom rationalen Kern irrationalen Vorgehens. In: Grundschule, 3/1994, 20-21.

Siebert, Birger (2010): Einleitung: Die kulturhistorische Theorie und ein sozialer Begriff von Behinderung. In: Ders. (Hrsg.): Integrative Pädagogik und die kulturhistorische Theorie. Bd.5 Behindertenpädagogik und Integration. Frankfurt am Main: Peter Lang, 11-17.

Siebert, Birger/Rodina, Katarina (2013): Interiorisation in der Zone der nächsten Entwicklung. In: Feuser, Georg/Kutscher, Joachim (Hrsg.): Entwicklung und Lernen. Bd. 7. Behinderung, Bildung, Partizipation. Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik. Stuttgart: Kohlhammer, 230-234.

Speck, Otto (1998): Bildung - ein Grundrecht für alle. In: Dörr, Günter (Hrsg.): Neue Perspektiven in der Sonderpädagogik. Düsseldorf. 3-55.

Speck, Otto (2013): Bildung. In: Theunissen, Georg/Kulig, Wolfram/Schirbort, Kerstin (Hrsg.): Handlexikon Geistige Behinderung. Schlüsselbegriffe aus der Heil- und Sonderpädagogik, Sozialen Arbeit, Medizin, Psychologie, Soziologie und Sozialpolitik. Stuttgart: Kohlhammer, 51-52.

Stegemann, Wolfgang (1983): Tätigkeitstheorie und Bildungsbegriff. Köln: Pahl-Rugenstein.

Stinkes, Ursula (2017): Bildung. In: Ziemen, Kerstin (Hrsg.): Lexikon Inklusion. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 32-33.

Stöppler, Reinhilde (2017): Einführung in die Pädagogik bei geistiger Behinderung (2. Auflage). München: Ernst Reinhardt.

Talyzina, Nina F. (1972): Theoretische Probleme des programmierten Unterrichts. In: Joachim Lompscher (Hrsg.): Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen. Neuere Untersuchungen zur Anwendung der Lerntheorie Galperins. Berlin (Ost): Volk und Wissen, 261-314.

Talyzina, Nina F. (2001): Die Tätigkeitstheorie des Lernens als Grundlage einer neuen Didaktik. In: Jantzen, Wolfgang (Hrsg.): Jeder Mensch kann lernen – Perspektiven einer kulturhistorischen (Behinderten-)Pädagogik. Neuwied, Kriftel, Berlin: Luchterhand, 204-220.

Talyzina, Nina F. (2013): Orientierung und Orientierungsgrundlage. In: Feuser, Georg/Kutscher, Joachim (Hrsg.): Entwicklung und Lernen. Bd. 7. Behinderung, Bildung, Partizipation. Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik. Stuttgart: Kohlhammer, 224-229.

Terfloth, Karin/Bauersfeld, Sören (2015): Schüler mit geistiger Behinderung unterrichten: Didaktik für Förder- und Regelschule (2. überarbeitete Auflage). München: Reinhardt.

Theunissen, Georg (2007): Geistige Behinderung. In: Bundschuh, Konrad/Heimlich, Ulrich/Krawitz, Rudi (Hrsg.): Wörterbuch Heilpädagogik. Klinkhardt: UTB, 94-96.

Theunissen, Georg (2013): Förderung. In: Theunissen, Georg/Kulig, Wolfram/Schirbort, Kerstin (Hrsg.): Handlexikon Geistige Behinderung. Schlüsselbegriffe aus der Heil- und Sonderpädagogik, Sozialen Arbeit, Medizin, Psychologie, Soziologie und Sozialpolitik. Stuttgart: Kohlhammer, 119.

Treffers, Adrian (1987): Integrated Column Arithmetic According to Progressive Schematisation. In: Educational Studies in Mathematics 2/1987, 125-145.

Treffers, Adrian (1993): Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education. In: Educational Studies in Mathematics 1-2/1993, 89-108.

UNSESCO (Hrsg.) (1994): Die Salamanca Erklärung und der Aktionsrahmen zur Pädagogik für besondere Bedürfnisse. Zugriff am 22.07.2018. Verfügbar unter: https://www.unesco.de/sites/default/files/2018-03/1994_salamanca-erklaerung.pdf

Vereinte Nationen (Hrsg.) (2006): Status of Treaties – CHAPTER IV – HUMAN RIGHTS – 15. Convention of the Rights of Persons with Disabilities. Zugriff am 17.08.2018. Verfügbar unter: http://treaties.un.org/Pages/ViewDetails.aspx?src=TREATY&mtdsg_no=IV-15-a&chapter=4&lang=en

Vereinte Nationen (Hrsg.) (2006): Status of Treaties – CHAPTER IV – HUMAN RIGHTS – 15. Convention of the Rights of Persons with Disabilities. Zugriff am 17.08.2018. Verfügbar unter: http://treaties.un.org/Pages/ViewDetails.aspx?src=TREATY&mtdsg_no=IV-15-a&chapter=4&lang=en

Vries, Carin de (2014): Mathematik im Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung. Grundlagen und Übungsvorschläge für Diagnostik und Förderung im Rahmen eines erweiterten Mathematikverständnisses. 3. verbesserte Auflage. Dortmund: verlag modernen lernen.

Vries, Carin de (2014): Mathematik im Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung. Grundlagen und Übungsvorschläge für Diagnostik und Förderung im Rahmen eines erweiterten Mathematikverständnisses (3., verb. und erw. Aufl.). Dortmund: Verlag Modernes Lernen.

Wartha, Sebastian; Benz, Christiane (2017): Geleitwort. In: Fromme, Marina (2017): Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen. Wiesbaden: Springer Spektrum, V.

Weigand, Hans-Georg (2015): Begriffsbildung. In: Bruder, Regina/Hefendehl-Hebeker, Lisa/Schmidt-Thieme, Barbara/Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum, 255-278.

Winker, Gabriele/Degele, Nina (2009): Intersektionalität. Zur Analyse sozialer Ungleichheiten. Bielefeld: transcript.

Winter, Heinrich (1983): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterrichts. In Journal für Mathematik-Didaktik, 3/1983, 175-204.

Winter, Heinrich (1995): Mathematik und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Vol. 61, 37-46.

Winther, Cora (2012): Persönlichkeitsentwicklung in Pubertät und Adoleszenz als Kernproblem von inklusivem Unterricht in der Sekundarstufe. In: Jantzen, Wolfgang (Hrsg.): Kulturhistorische Didaktik. Rezeption und Weiterentwicklung in Europa und Lateinamerika. Berlin: Lehmanns Media, 236-312.

Wocken, Hans (2018): Inklusion an Schulen - ein Etikettenschwindel. Zugriff am 17.08.2018. Verfügbar unter: https://www.sueddeutsche.de/bildung/bildung-inklusion-an-schulen-ein-etikettenschwindel-1.4073257

Ziemen, Kerstin (2002): Eine Chance für alle Kinder und Jugendlichen – die „Vermittlung". Grundproblem der Didaktik. In: Zeitschrift für Heilpädagogik, 4/2002, 134-138.

Ziemen, Kerstin (2003): Integrative Pädagogik und Didaktik. Aachen: Shaker.

Ziemen, Kerstin (2010): Die begriffliche Justierung von „Kompetenz" – Konsequenzen für Pädagogik und Diagnostik. In: Siebert, Birger (Hrsg.): Integrative Pädagogik und die Kulturhistorische Theorie. Frankfurt am Main: Peter Lang, 197-211.

Ziemen, Kerstin (2017a): Inklusion und Didaktik - Die Mehrdimensionale Reflexive Didaktik. In: behinderte menschen, 4/5/2017, 3-9.

Ziemen, Kerstin (2017b): Inklusion. In: Kerstin Ziemen (Hrsg.): Lexikon Inklusion. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 101-102.

Ziemen, Kerstin (2018): Didaktik und Inklusion. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Zimpel, André Frank (2008): Der zählende Mensch. Was Emotionen mit Mathematik zu tun haben. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Zimpel, André Frank (2014): Einander helfen. Der Weg zur inklusiven Lernkultur. 2. Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Zimpel, André Frank (2016a) Trisomie 21. Was wir von Menschen mit Down-Syndrom lernen können. 2000 Personen und ihre neuropsychologischen Befunde. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Zimpel, André Frank (2016b): Lasst unsere Kinder spielen! Der Schlüssel zum Erfolg. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht